С. К. Бетяев

ПРОЛЕГОМЕНЫ К МЕТАГИДРОДИНАМИКЕ

R&C Dynamics

С. К. Бетяев

Пролегомены к метагидродинамике

Москва ♦ Ижевск

2006

УДК 532.527

Интернет-магазин

MATHESIS

http://shop.rcd.ru

- физика
- математика
- биология
- нефтегазовые технологии

Бетяев С. К.
Пролегомены к метагидродинамике. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. — 304 с.

Предпринята попытка создания метагидродинамики как фундаментальной науки.

Рассмотрены законы эволюции науки, аксиоматика, проблематика, свершившиеся и несвершившиеся научные революции. Выделены три парадигмы в гидродинамике, в качестве которых выбраны основные математические модели: Эйлера, Навье – Стокса, Рейнольдса. Проанализированы принципы построения физических и математических моделей, теория и классификация вихрей, основные понятия вычислительной гидродинамики, прогностика и диагностика. Обсуждается назначение эксперимента и проблематика, систематизированы *опыты в ванной*.

Систематизированы многочисленные задачи асимптотологии. В приложении приведена элементарная теория возмущений.

Книга предназначена для студентов, преподавателей вузов и для всех тех, кто интересуется гидродинамикой и асимптотологией.

ISBN 5-93972-425-6

© С. К. Бетяев, 2006
© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006

http://rcd.ru
http://ics.org.ru

Оглавление

Введение 7

Глава 1. **Краткая история гидродинамики** 11
1.1. Предыстория 11
1.2. От Ньютона 12
1.3. Через две революции к третьей 25

Глава 2. **Опыт** 29
2.1. Классификация 31
2.2. Мысленный эксперимент 37
2.3. Аэрогидродинамический эксперимент 39
2.4. Аэрогидродинамическое проектирование 40

Глава 3. **Математическое моделирование** 44
3.1. Основные принципы 44
3.2. Теория вихрей 51
3.3. Вычислительная гидродинамика 60
3.4. Парадоксы 66
3.4.1. Классификация 67
3.4.2. Антиномии первого рода 68
3.4.3. Антиномии второго рода 71

Глава 4. **Асимптотология** 74
4.1. Инспекционный анализ 74
4.2. Линеаризация 75
4.3. Редукция к меньшему числу независимых переменных . . 83
4.4. Сингулярности 94
4.5. Теория крыла 102
4.6. Расслоение ламинарных течений 112
4.7. Расслоение турбулентных течений 123
4.8. Более крутые примеры 128

ПРИЛОЖЕНИЕ А. **Введение в метаисторию наук** 132
А.1. Историческое время 133
А.2. Сущность истории наук 135
А.3. Как мы познаём мир 137
А.4. Критерии объективности 140
А.5. Диагностика и прогностика 144
А.6. Законы физики и законы истории: сходство и различие . . 148

ПРИЛОЖЕНИЕ В. **История теоретической гидродинамики в России** 152
В.1. Предыстория 152
В.2. Школа Жуковского 154
В.3. Школа Фридмана 158
В.4. Школа Колмогорова 159
В.5. Школа ЦАГИ 161
В.5.1. С. А. Христианович 163
В.5.2. Ф. И. Франкль 168
В.5.3. В. В. Струминский 173
В.5.4. А. А. Никольский 182
В.6. ... и другие 193

ПРИЛОЖЕНИЕ С. **Опыты в ванной** 199
С.1. Вращающиеся тела 200
С.2. Вращающиеся потоки 203
С.3. Смерч у нас дома 205
С.4. Капли, струи и другие образования 210
С.5. Волны на воде 219
С.6. Взаимодействие волн на воде 226
С.7. Звуковые волны 228
С.8. Колебания тел в жидкости и в газе 229
С.9. Ячеистые структуры 232
С.10. Капиллярная жидкость 235
С.11. Необычные свойства обычных жидкостей 239

ПРИЛОЖЕНИЕ D. **Очерк о методах возмущений** 244
D.1. Разложение функций в ряды 246
D.2. *O*-символика 249
D.3. Асимптотические разложения 251
D.4. Решение квадратного уравнения 255
D.5. Уравнения высших степеней 257

D.6. Трансцендентные уравнения 260
D.7. Метод сращивания асимптотических разложений 261
D.8. Метод многих масштабов 265
D.9. Метод деформированных координат 269

Литература 274

Именной указатель 293

To my granddaughter Anna Timoshina,
student of the Cambridge University (England)

Посвящается внучке Анне Тимошиной,
студентке Кембриджского университета (Англия)

Введение

Боги людям открыли не всё.
В поиск пустившись,
Люди сами познали немало.

Ксенофан

Вопрос о математическом обосновании принципов, положенных в основу наук, поднял Д. Гильберт в 1900 году на втором международном конгрессе математиков (Александров, 1969), включив его в свою знаменитую *шестую проблему*: «Откуда бы ни исходили математические идеи, из теории познания или из геометрии, из физики или из других естественных наук, задача математики — исследовать принципы, лежащие в основе этих идей, и вывести эти принципы, исходя из простой и полной системы аксиом, таким образом, чтобы точность новых понятий и их применимость для дедукции ни в коей мере не были меньше, чем у старых арифметических понятий».

Метатеорией в математике называется теория, объектом исследования которой выбрана некоторая (предметная) теория, схематизируемая набором аксиом и вытекающим из них чисто логическим путём набором теорем. В границах метатеории[1] исследуются свойства этих аксиом (полнота, непротиворечивость, независимость). Метанаука определяет постановку задач, дает направление научного поиска. Термин «метанаука» введён учениками Д. Гильберта по аналогии с термином «метаматематика», который придумал сам Гильберт для обозначения раздела математической логики в связи с намеченной им программой обоснования математики. К сожалению, эта идея оказалась несбыточной, ибо

[1]Термин «метафизика» имеет более широкий смысл, чем просто «метатеория». В своем многовековом историческом развитии он претерпел смысловую трансформацию. Кроме философского смысла — противоположности диалектики или восходящего к Аристотелю учению о спекулятивных принципах бытия — он означает еще науку о методологии и фундаментальных основах физики (Владимиров, 2002).

Метамеханике посвящена прекрасная монография (Блехман и др., 1983).

Термин «метаистория» употребляется в различных смыслах. Историк В. И. Щербаков трактует его как науку о глобальных переселениях племен и народов.

в 1931 году К. Гёдель доказал свою знаменитую теорему о неполноте. *Надежда Гильберта рухнула.* Несмотря на неудачу логического подхода к обоснованию математики, метаматематика сыграла выдающуюся роль в развитии математической логики.

Для метагидродинамики предметной наукой является гидродинамика[1], и посвящена она аксиоматике, эпистемологии, методологии, парадигматике и истории динамики жидкости, а также выявлению перспектив развития и связей с другими науками и техникой. Если в рамках динамики жидкости решаются конкретные задачи и разрабатываются конкретные теории, то в рамках метагидродинамики обсуждаются готовые решения и теоремы. Метагидродинамика, базирующаяся на математике, физике, метаматематике, философии и истории наук, представляет собой переход от мира расчёта, разложений и измерений к миру идей, прогнозов и озарений. Гидродинамика — это теория, метагидродинамика — это мировоззрение. Друг без друга они так же немыслимы, как немыслимо дерево без корней. Метагидродинамика призвана собрать факты, соединить их между собой логической связью, создать обобщающие теории, увидеть истину в ее целостности. Она даёт ви́дение гидродинамических проблем, их разрешение и отмирание, направляет научный поиск. К метагидродинамике следует отнести проблемные монографии и обзоры, сохраняющие сегодняшнюю актуальность.

За последний век считавшаяся образцом полностью завершённой области знаний механика претерпела глубокие изменения. Постепенно выявлялись всё новые удивительные свойства эволюции динамических систем и определяющая роль таких дихотомий, как устойчивость — неустойчивость, случайность — закономерность, детерминизм — неопределённость, линейность — нелинейность, регулярность — сингулярность, непрерывность — дискретность, симметрия — асимметрия, эволюция — революция, обратимость — необратимость, коллапс — взрыв, слоистость — однородность.

Без гидродинамики немыслимы современные технологии, невозможно развитие транспорта, энергетики, металлургии, таких наук, как астрофизика, биология, океанография, метеорология. Давно на слуху такие

[1]В англоязычных странах вместо названия «гидродинамика» (динамика *воды*) используют более объемлющее словосочетание — «динамика жидкости». У нас корень *гидро-* не звучит как *вода*, не режет слух, поэтому прижилось односложное название — гидродинамика.

Газовая динамика — раздел гидродинамики, посвященный изучению влияния сжимаемости среды. Аэродинамика — раздел гидродинамики, посвященный обтеканию тел воздухом и имеющий поэтому авиационные приложения. Механика сплошных сред объединяет гидродинамику и теорию упругости.

названия: магнитная гидродинамика, геологическая гидродинамика, медицинская гидродинамика (Бэтчелор и др., 2000). Гидродинамические модели применяются в самых, на первый взгляд, неожиданных областях: классическая нерелятивистская космология (Вайнберг, 1981), физиология человека и животных (Педли, 1983), уфология (Баренблатт, Монин, 1979), биологическая гидродинамика (Кокшайский, 1974). К вопросу моделирования любого нового явления, будь то строение атома или эволюция Вселенной, часто примеряют «механистический кафтан», то есть ньютонову физику. Мы уже многое знаем об устройстве атома и Вселенной, но до сих пор не можем, исходя из первых принципов физики, рассчитать расход воды в канале, подъёмную силу самолёта, силу сопротивления ракеты или автомобиля и даже оптимальную форму унитаза.

Неправильно считать, что проблемы существуют только в тех разделах физики, где масштабы явления предельно малы или предельно велики. Они существуют и там, где масштаб явления привычен для нашего восприятия, где действуют законы классической механики — части физики, состоящей из теоретической механики, теории упругости и гидродинамики. Гидродинамика — наука во многом интуитивная, незавершённая. Истины в последней инстанции не существует: каждую проблему можно расширить и углубить. И этот путь поисков с успехами и неудачами представляет увлекательное зрелище, тогда как от готового и устоявшегося веет холодом и скукой. Наука — это птица-тройка: Росинант (романтика), Пегас (вдохновение) и Буцефал (война).

Перефразируя высказывание Д. Гильберта о физике, которая «слишком трудна для физиков», следует отметить, что гидродинамика слишком трудна для гидродинамиков. Она сплетена с математикой в плотный клубок.

Если химия разделилась на две *подхимии* (органическую и неорганическую), то физика разделилась на много *подфизик*. Специалист, работающий в одной из них, не поймет специалиста, работающего в другой подфизике. Гидродинамика тоже разделилась на много разделов, которые трудно уложить в голову одного человека.

В соответствии с принятой десятичной системой счисления в начале каждого века — а особенно тысячелетия! — итожатся результаты развития культуры, науки, техники; оживляют свою деятельность философы и историки; анализируется прошлое, даются прогнозы, ставятся задачи на будущее (Бэтчелор, 2000). «Тот, кто копается в глубоких шахтах знания, должен, — говорил И. Ньютон, — как и всякий землекоп, время от времени подниматься на поверхность подышать чистым воздухом. В один из таких промежутков я и пишу вам . . . ».

В последнее время ряды учёных-исследователей (вычислителей, экспериментаторов, теоретиков[1]) потеснили учёные-мировоззренцы (философы, историки, популяризаторы). Вместо однобокого материалистического подхода внедряется композитный анализ, примиряющий духовное и материалистическое начала.

Благодарности

Автор признателен В. М. Фомину (ЦАГИ) за предоставленную возможность трудиться над темой, жене В. А. Торжковой за хлопоты, В. П. Визгину (ИИЕТ) за критику, дочери Н. С. Тимошиной за морально-материальную поддержку в трудные времена, *племяннице* С. Г. Головатюк за излучаемое ею вдохновение.

[1]По установившемуся научному слогану вычислителей называют *клавишниками*, экспериментаторов — *трубачами*, а теоретики делятся на *классиков* — тех, кто изучает уравнения математической физики, *эпсилонистов* — тех, кто использует методы асимптотических разложений, *солитонистов* — тех, кто занимается нелинейной механикой, и *хаотистов* — тех, кто исследует турбулентность.

Глава 1

Краткая история гидродинамики

История точных наук начинается с И. Ньютона.

1.1. Предыстория

Существовавшие задолго до Ньютона преставления древних людей о природе физических явлений обобщил Аристотель (384–322 гг. до р. Х.). Он объяснял причину движения летательного снаряда на основе его взаимодействия с окружающей средой — воздухом (Аристотель, 1936). Такое объяснение оказалось и неверным, и гениальным сразу. Гениальным — потому что явилось первым, предоставившим впоследствии основу для обсуждения и отрицания. Неверным — потому что до введения таких необходимых для объяснения понятий, как инерция и трение, оставалось... два тысячелетия. Но, как считал Бор, великая истина — это такая истина, отрицание которой тоже является великой истиной.

И. Ньютон (1643–1727)

Средневековые схоласты[1] (Оккам с его «бритвой», Буридан с «ослом») и великий Леонардо да Винчи расшатали, а затем во многом опро-

[1]Считается, что большой вклад в революционное развитие науки в эпоху Возрождения внесли такие псевдоучёные, как алхимики, мистики, метафизики и астрологи. По утверждению Римского-Корсакова: «Никогда химики не достигнут высот алхимиков и никогда астрономы не узнают счастья астрологов...».

Схоласты Средневековья гиперболизировали роль логики, что стало основой для создания современной науки. Безуспешные попытки изобрести вечный двигатель привели

вергли воззрения Аристотеля, расчистив тем самым дорогу для идей Ф. Бэкона, Г. Галилея и Р. Декарта — тех гигантов, на плечах которых стоял, по его собственному выражению, Ньютон. Темп открытий увеличивался: от Архимеда до Ньютона прошло два загадочных тысячелетия, которые называются «культурным застоем», от Ньютона до первого самолёта — два века (рис. 1.1). В отличие от законов гидродинамики законы гидростатики, установленные гениальным Архимедом, оказались незыблемыми до сих пор.

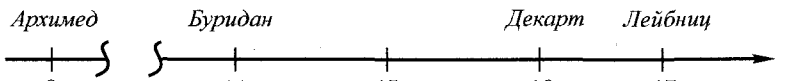


Рис. 1.1. «Плечи гигантов»

О том, как среда сопротивляется движению тела, можно узнать, наблюдая за падением тел в воде или в воздухе. Проведением подобных опытов одним из первых занялся Леонардо да Винчи (1955). Его дело продолжил другой «шаробросатель» — Галилео Галилей (1964). Сбрасывая с наклонной Пизанской башни тяжёлые и лёгкие шары, он установил независимость скорости падения тяжёлых тел от их веса и — заодно! — сформулировал один из величайших физических принципов — принцип инерции. Исаак Ньютон бросал шары с высоты лондонского собора Святого Павла. Вопрос о сопротивлении тел был для него далеко не праздным, — он хотел доказать, что, в отличие от утверждений аристотелианцев, космическое пространство не заполнено материей. В противном случае космическая материя оказывала бы сопротивление движению небесных тел и вся стройная механическая система мира, воздвигнутая трудами Ньютона, рассыпалась бы, как карточный домик. Идею создания летательного аппарата выдвинул английский монах-францисканец, профессор Оксфордского университета Р. Бэкон (~1214–1292).

1.2. От Ньютона... (первая парадигма, вторая парадигма, третья парадигма)

«Начала» Ньютона (1689) в гидродинамике ознаменовали собой переход от аналогового моделирования («шаробросания») к математическому. Становление механики, а значит, и физики как точных наук началось

к созданию термодинамики. Нельзя сбрасывать со счетов истории науки такие, казалось бы, ее тупиковые ветви, как поиск «философского камня» и жизненного эликсира, теория флогистона, теплорода, эфира и т. д. Наука выросла из религии. Начальные этапы ее истории прочно связаны с христианской верой. Затем наука и вера разошлись (см. Бетяев, 2003б).

с уравнения Ньютона:

$$m\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{f}$$

($\boldsymbol{u}$ — вектор скорости, m — масса, $\boldsymbol{f}$ — сила, t — время), которое поэтому можно считать исходной парадигмой всей физики.

Первая парадигма

Естественно принять, что в теоретической гидродинамике парадигмами являются математические модели течения жидкости. Для применения уравнения Ньютона к движению сплошной среды следовало перейти к описанию течения в фиксированной точке пространства, то есть отнести массу и силу к единице объёма. Для этого же потребовалось ввести субстанциональное ускорение

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u}.$$

Наконец, переход от отдельных тел к континууму потребовал вместо сосредоточенной в точке силы введения нормального напряжения — давления p. В отличие от ньютоновой механики оказалось, что напряжения не заданы априори, а самовозникают вследствие движения жидкости!

Л. Эйлер (1707–1783)

Переход к континууму сделал петербургский академик Л. Эйлер. Выведенные им в 1755 году уравнения движения сплошной среды, не потерявшие актуальности и в наше время, так и называются — эйлеровыми:

$$\rho\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = -\Delta p, \quad \nabla \boldsymbol{u} = 0, \tag{1.1}$$

где ρ — плотность жидкости.

В более широком смысле уравнениями Эйлера называются уравнения движения любой идеальной среды, будь то сжимаемый газ или

стратифицированная жидкость. Модель идеальной сплошной среды фон Нейман образно и остроумно назвал «моделью сухой воды». Она явилась первой парадигмой гидродинамики.

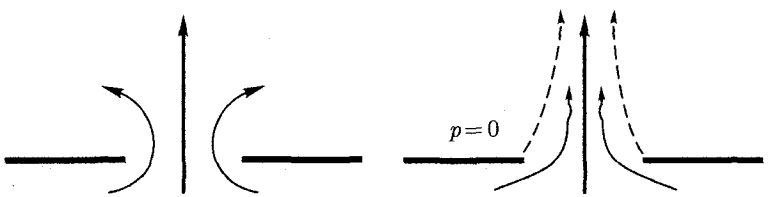


Рис. 1.2. Истечение жидкости из щели: *а* — безотрывное (по Эйлеру); *б* — отрывное (по Гельмгольцу)

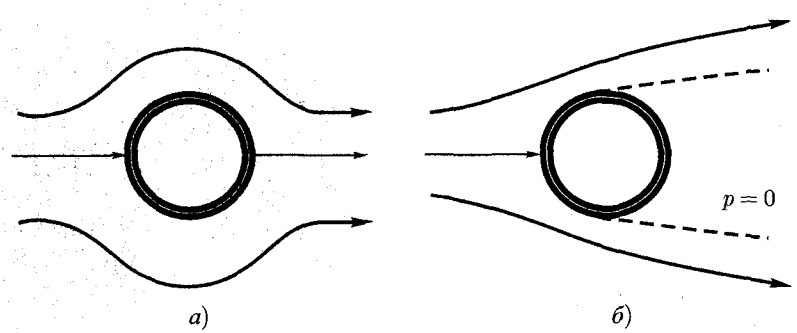
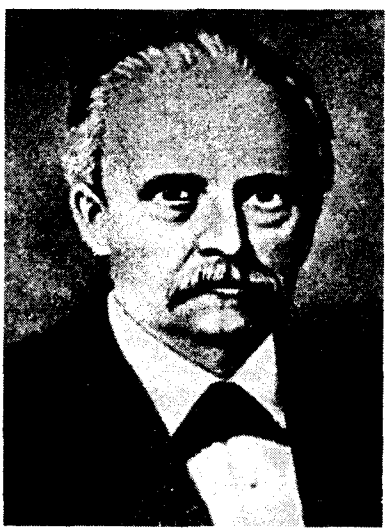


Рис. 1.3. Обтекание окружности: *а* — безотрывное (по Эйлеру); *б* — отрывное (по Гельмгольцу)

Однако модель «сухой воды» неудовлетворительно описывала реальные процессы. На рис. 1.2*а* показано непрерывное истечение жидкости из щели в плоскости: картина обратима и симметрична относительно самой плоскости. Подобно электромагнитному полю течение занимает всё пространство. Г. Гельмгольц[1] в 1858 году предложил принципиаль-

[1]Случайно или нет, но в XIX веке многие врачи занимались гидродинамикой. Д. Бернулли (1700–1782) был профессором анатомии; Гельмгольц (1821–1894) работал про-

но другую схему — истечение с отходящими от краёв щели разрывами, показанными на рис. 1.2*б* штриховыми линиями. Его схема находилась в визуальном согласии с истечением воды из крана вплоть до момента турбулизации и капледробления струи. Такая же схема применяется в задаче обтекания (рис. 1.3), хотя здесь удовлетворительного соответствия с опытом не наблюдается. Введя поверхности разрыва, Гельмгольц сделал решающий шаг в приближении модели идеальной жидкости к действительности. У него такой поверхностью была свободная граница, но впоследствии в качестве поверхностей разрывов в гидродинамике использовались вихревые пелены, контактные разрывы и даже так называемые сильные разрывы. Ввиду этого концепция кусочно-разрывного течения идеальной жидкости, выдвинутая Гельмгольцем, существенно расширяет модель Эйлера. Справедливости ради, следует напомнить, что о возможности существования разрывных решений впервые упомянул Ньютон в «Началах», но его рассуждения были ошибочны.



Г. Гельмгольц (1821–1894)

В рамках первой парадигмы удалось разработать теорию волн на воде как в линейном, так и в нелинейном приближениях (Стокер, 1959; Уизем, 1977; Лайтхилл, 1981). История открытия солитона С. Расселом, Н. Крускалом и М. Д. Забуски[1] вошла во все учебники по нелинейной механике (Додд, 1988; Гольдштейн, 1948). Теория нелинейных волн, принадлежащая как гидродинамике, так и нелинейной механике, представляет собой *субпарадигму эйлеровой* модели течения жидкости.

фессором физиологии и анатомии; Дж. Л. М. Пуазейль (1799–1869) заинтересовался движением крови по капиллярам, будучи парижским врачом, профессором анатомии; Т. Юнг (1773–1829) и первооткрыватель закона сохранения энергии Ю. Р. Майер (1814–1878) тоже работали врачами; у А. Зоммерфельда (1868–1951) врачом был отец.

[1]Из российских ученых наибольший вклад в теорию нелинейных волн внес физик-теоретик В. Е. Захаров. Широко известны: уравнение Захарова в физике плазмы, метод Захарова – Шабата в теории уравнений математической физики, «метод одевания» Захарова–Шабата в теории гамильтоновых структур, эффект самофокусировки Захарова и т. д.

Другую субпарадигму эйлеровой модели составила динамика идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа. Отличительная особенность этой теории — непостоянство плотности газа во времени и в пространстве. С учетом этого факта первое уравнение (1.1) сохранило свой вид, а второе уравнение (уравнение неразрывности) приняло вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \boldsymbol{u}) = 0.$$

Поскольку число независимых переменных увеличилось на 1, для замыкания системы уравнений Эйлера понадобилось уравнение сохранения энергии — условие отсутствия притока тепла:

$$T\frac{ds}{dt} = 0,$$

где $s(p, T)$ — энтропия, T — температура.

История газовой механики изложена Я. Б. Зельдовичем (1946). Ударную волну открыл «на кончике пера» Б. Риман в 1876 году. Однако гипотезу о существовании ударной волны задолго до него, в 1848 году, высказал Стокс, но отказался от нее под влиянием критики В. Томсона и своего ученика лорда Рэлея.

Газовая динамика содержит две «жемчужины»: теорию трансзвуковых течений, когда характерное число Маха M_∞ мало отличается от 1, и теорию гиперзвуковых течений, когда $M_\infty \to \infty$.

Т. Карман, С. В. Фалькович и К. Г. Гудерлей вывели изящное уравнение для потенциала возмущений трансзвукового плоского течения φ:

$$[K - (\gamma - 1)\varphi_x]\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \tag{1.2}$$

где $K = (1 - M_\infty^2)\delta^{-2/3}$ — параметр трансзвукового подобия, δ — характерный угол наклона вектора скорости к невозмущенному потоку, γ — показатель адиабаты.

Уравнение (1.2) относится к смешанному типу: эллиптическому при $K > (\gamma + 1)\varphi_x$ и гиперболическому при $K < (\gamma + 1)\varphi_x$. Пионером в исследовании уравнений такого типа был итальянский математик Ф. Трикоми (1897–1978).

С. А. Чаплыгин разработал метод годографа для решения уравнений смешанного типа.

Л. Берс, Ф. И. Франкль, А. А. Никольский, О. С. Рыжов исследовали трансзвуковое обтекание крылового профиля, течения в сопле и в свободной струе. Дж. Коул, Л. Кук, Х. К. Ченг, С. И. Менг рассмотрели трансзвуковое трехмерное обтекание стреловидных и нестреловидных

крыльев. Исследовались также осесимметричные и вихревые трансзвуковые течения (см. Коул, Кук, 1989; Шифрин, 2001). Нерешенные проблемы теории трансзвуковых течений связаны, в основном, с обоснованием математической корректности краевых задач (Берс, 1961).

Область возмущенного движения газа при гиперзвуковом обтекании тела занимает тонкий окружающий тело слой. Классический закон гиперзвукового подобия установил Цянь Сюэ-сень в 1946 году (см. Хейз, Пробстин, 1962). У. Д. Хейз в 1947 году установил закон плоских сечений — аналогию между стационарным трехмерным гиперзвуковым обтеканием острого тела и плоским нестационарным течением за поршнем. М. Ван-Дайк в 1950 году развил теорию малых возмущений, как в случае $M_\infty\delta = O(1)$, так и в случае $M_\infty\delta \to \infty$. Линь Шао-цзи в 1954 году обнаружил аналогию между стационарным гиперзвуковым обтеканием затупленного тела и точечным взрывом.

При $\gamma \to \infty$ отношение плотностей на скачке уплотнения становится бесконечно большим, а область возмущенного движения — бесконечно малой. Этот факт навел А. Буземана и Е. Зенгера в 1933 году (!) на мысль использовать для расчета гиперзвуковых течений схему Ньютона абсолютно неупругого удара частиц газа о поверхность обтекаемого тела. В дальнейшем теория Ньютона, привлекающая внимание ввиду своей простоты, была усовершенствована многими учеными.

В гиперзвуковом течении проявляются такие заслуживающие отдельного обзора свойства реального газа, как вязкость, теплопроводность, диссоциация молекул, излучение, релаксация, разреженность и пр.

Вторая парадигма

Гидродинамика содержит красоту двух видов. С одной стороны, это красота логики, красота математического факта. А с другой стороны — красота вихрей, красота непознанной нелинейности. В динамике вихрей различимы — но не разделимы! — три процесса: рождение, эволюция и диффузия. Модель идеальной жидкости описывает эволюцию, иногда — рождение, но никогда — диффузию вихрей. Для понимания процессов рождения и диссипации понадобилось перейти к более сложной модели — модели «мокрой воды», учитывающей влияние вязкости жидкости.

Если первая парадигма строилась на спекулятивной основе, исходя из основных принципов и понятий механики, то для построения вто-

рой парадигмы потребовались некоторые априори неизвестные характеристики свойств рассматриваемой сплошной среды: в данном случае — вязкости, а в общем случае — теплопроводности, сжимаемости, второй вязкости и т. д.

Прандтль (1875–1953)

В гидродинамике имеется три точных закона сохранения: массы, импульса и энергии. На основе этих законов (первых принципов физики) выводятся уравнения движения. Остальные законы — приближенные, эмпирические. К ним относятся так называемые *законы состояния*, определяющие зависимость коэффициентов переноса от макроскопических параметров: законы Клапейрона, Фика, Ньютона, Дарси и т. д. Где взять эти законы состояния? Естественно попытаться их добыть в рамках кинетической теории при изучении структуры среды в масштабе, меньшем по порядку величины, чем гидродинамический масштаб. Говоря другими словами, осреднить происходящие в среде внутренние физико-химические процессы по малым (атомно-молекулярным) масштабам. К сожалению, такая программа до сих пор не завершена. Но это уже история другой[1] науки (Джозеф, 1986).

Впервые уравнения движения вязкой жидкости выписал французский учёный и инженер Луи Навье (1785–1836). Для этого потребовалось ввести тензор напряжений, то есть учесть не только нормальные, но и касательные силы. В правую часть (1.1) Навье ввёл аддитивный член, ответственный за проявление вязкости.

Жидкость, напряжения в которой линейно пропорциональны деформации, называется ньютоновой, потому что впервые такая гипотеза была выдвинута Ньютоном: «Сопротивление, происходящее от недостатка скользкости жидкости, при прочих равных условиях предполагается пропорциональным скорости, с которою частицы жидкости разъединяются

[1] Мы не рассматриваем также историю теории сверхтекучей жидкости, которая традиционно (и может быть, неправильно) относится к физике.

друг с другом» (см. Ньютон, 1989, с. 486). Сегодня мы знаем, как понимать его расплывчатое выражение «скорости, с которой...». Это — поперечный градиент скорости жидкости. Однако в конкретной задаче о круговом движении Ньютон выводит ошибочное условие для трения, на что спустя 158 лет после выхода его «Начал» указал Дж. Стокс.

Для ньютоновой жидкости уравнения сохранили векторную форму:

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{u}, \quad \nabla\boldsymbol{u} = 0, \tag{1.3}$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости.

Большой вклад в исследование этого уравнения внёс все тот же Стокс (1819–1903). Поэтому уравнения (1.3), а также их обобщения на случай движения жидкостей с другими реологическими свойствами называются уравнениями Навье–Стокса. Уравнения Эйлера — частный случай уравнений Навье–Стокса при $\nu = 0$. Сам Стокс «получил по заслугам» — линейное уравнение Навье–Стокса

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{u} \tag{1.4}$$

называется его именем — *стоксово уравнение.*

Вторая парадигма — это математическая модель течения вязкой жидкости. Для её завершения недоставало граничных условий на поверхности контакта жидкости с твёрдым телом. Такой контакт (жидкость — твёрдое тело или газ — твёрдое тело) происходит в тонком пристеночном мезослое, где следует учитывать шероховатость и атомно-молекулярную структуру сред. Уже Д. Бернулли в 1738 году осознавал, что жидкость не может скользить по поверхности твёрдого тела: «Наблюдаются огромные различия, главным образом, в части прилипания воды к стенкам трубы; это прилипание заведомо может в некоторых случаях вызывать невероятные эффекты» (Гольдштейн, 1948). Француз Жирар в 1813 году считал, что вблизи контактной поверхности имеется весьма тонкий слой покоящейся относительно тела жидкости; профиль продольной скорости в этом случае показан на рис. 1.4*а*. Вторая гипотеза принадлежала Навье. На основании тех же усложнённых молекулярных предположений, которые привели его к выводу уравнений движения вязкой жидкости, он установил, что на твёрдой поверхности имеет место проскальзывание жидкости, причём скорость проскальзывания u_0 пропорциональна напряжению трения, то есть $u_0 = \lambda\,\partial u/\partial n$, где постоянная λ имеет размерность длины, а дифференцирование проводится по направлению внешней нормали n к твёрдой поверхности.

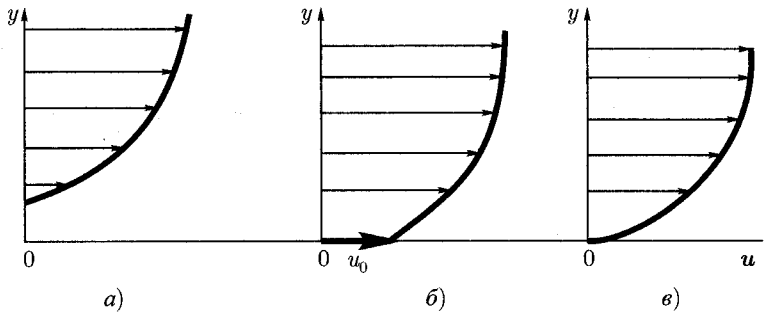


Рис. 1.4. Три гипотезы — три формы пристеночного профиля скорости: *а* — покоящийся слой (Жирар, 1813); *б* — проскальзывание (Навье, 1823); *в* — прилипание (Кулон, 1800)

Профиль скорости в этом случае приведён на рис. 1.4 *б*. Наконец, третью гипотезу о прилипании жидкости к твёрдой поверхности (рис. 1.4 *в*) первым, по-видимому, выдвинул Кулон в 1800 году. В результате многочисленных опытов, а также анализа, проделанного Стоксом в 1851 году и Максвеллом в 1879 году, было установлено, что условие прилипания справедливо, если среда не разрежена. Входящая в условие Навье постоянная λ по порядку величины равна длине свободного пробега молекул газа. Гидродинамика не рассматривает явления, происходящие на таких малых масштабах.

В полном виде уравнения Навье – Стокса оказались слишком сложными для решения, особенно в *докомпьютерную эпоху*. Решительное продвижение вперёд сделал Л. Прандтль (1905), предложивший асимптотическую концепцию пограничного слоя. В соответствии с этой субпарадигмой при больших числах Рейнольдса уравнения Навье – Стокса параболизуются, что делает возможным постановку задачи с начальными данными. Кроме того, давление в пограничном слое оказывается известным и равным давлению во внешнем потоке. Этот факт снижает на 1 число неизвестных функций, а значит, и число уравнений. Сам Прандтль главную идею выразил такими словами: «Поток разделяется на две части, взаимодействующие друг с другом; с одной стороны, мы имеем «свободный поток», который можно рассматривать как не имеющий трения, согласно теоремам Гельмгольца о вихрях, и, с другой стороны, пограничные слои около твёрдых стенок. Движение этих слоёв регулируется свободной жидкостью, но эти слои придают, в свою очередь, свободной жидкости её основные свойства путём выделения вихревых поверхностей».

Кого считать первооткрывателем: учёного, выдвинувшего идею, или учёного, доказавшего её справедливость?! О наличии пристеночного пограничного слоя было известно задолго до Прандтля. Поэтому не Прандтль открыл пограничный слой. Но он сделал большее, показав, что понятие пограничного слоя — асимптотическое, что разложение в пограничном слое сращивается с внешним решением. Субпарадигма Прандтля, существенно упрощающая модель вязкой жидкости, открыла путь к решению прикладных задач. Прандтль создал мощную научную школу: Ж. Аккерет, А. Бетц, А. Буземан, М. Мунк, В. Толмин, И. И. Никурадзе, Х. Шлихтинг и другие.

На дне пограничного слоя выполняется условие прилипания, а на его внешней границе решение сращивается с невязким внутренним пределом.

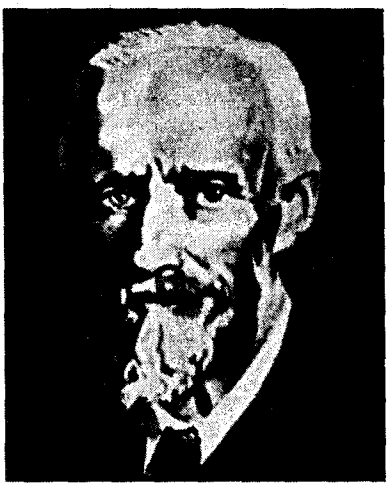
Третья парадигма

Однако вскоре выяснилось, что в подавляющем большинстве реальных случаев ламинарное течение слабовязкой жидкости становится неустойчивым и рано или поздно переходит в турбулентное. Общий критерий возникновения турбулентности установлен О. Рейнольдсом[1] в 1883 году. Он подкрашивал ламинарную струйку тока во входной части стеклянной трубки и следил, когда течение станет турбулентным, фиксируя при этом критическое значение безразмерного определяющего параметра, названного впоследствии в его честь числом Рейнольдса. В Манчестерском университете, где Рейнольдс проводил свои опыты, сохранилась его экспериментальная установка. Спустя почти столетие знаменитые опыты повторили, однако из-за интенсивного уличного движения критическое значение числа Рейнольдса оказалось ниже значения 13 000, которое получил сам Рейнольдс (см. Ван-Дайк, 1986).

Представив скорость u_k в виде суммы средней $\overline{u_k}$ и пульсационной u'_k составляющих, а давление в виде $p = \overline{p} + p'$, Рейнольдс получил

[1] Мы уже убеждались, что у первооткрывателей всегда находятся предшественники. Известный афоризм гласит, что в науке не бывает мыслей, истоки которых нельзя было бы найти в прошлом. Америку открыл Колумб, но названа она по имени Америго Веспуччи. Не является исключением и Рейнольдс. Ещё древние атомисты знали о спонтанной непредсказуемости течений жидкости (см. Пригожин, Стенгерс, 1986). Лукреций называл этот феномен «клинаменом» вместо современного — «турбулентность».

Осборн Рейнольдс (1842–1912) работал инженером, занимался проблемой осаждения пара в паровых машинах. Обладая странными манерами и избыточной подозрительностью, он стал ярым противником световой теории Дж. К. Максвелла. Свое открытие в гидродинамике Рейнольдс сделал, будучи больным афазией.



О. Рейнольдс (1842–1912)

уравнения для средних величин, носящие его имя:

$$\frac{\partial \overline{u_k}}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} = \tag{1.5}$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_k} + \nu\frac{\partial^2 \overline{u_k}}{\partial x_j \partial x_j} - \overline{u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} u_j}.$$

По сравнению с уравнением Навье–Стокса (1.3) это уравнение включает дополнительные напряжения — так называемые напряжения Рейнольдса $\overline{u_k u_j}$. Попытки найти их вид из первых принципов физики оказались безуспешными, поэтому уравнение (1.5) стало базой для развития эмпирических теорий.

К недоопределенной системе (1.5) следует добавить уравнения для пульсаций и правила осреднения. Полученную таким образом расширенную систему уравнений следует называть системой Рейнольдса. Решение этой системы кроме среднего и пульсационного слагаемого содержит еще волновой член (Манкбоди, 1994).

Л. В. Келлер и А. А. Фридман дали аналитическую формулировку проблемы турбулентности, сведя задачу к бесконечной системе уравнений для статистических моментов. Джеффри Тэйлор ввёл в рассмотрение корреляционные функции, а также впервые ввёл понятия об однородной и изотропной турбулентности. Льюис Фри Ричардсон высказал глубокие соображения о «каскадном процессе» передачи энергии по спектру от крупномасштабных мод к мелкомасштабным. Эта картина развитой турбулентности изображена Ричардсоном в стихотворении, которое входит во многие учебники по турбулентности:

Big whorls have little whorls,
Which feed on their velocity;
Little whorls have smaller whorls,
And so on unto viscosity[1].

[1] Крупные завихрения рождают мелкие завихрения,
питающиеся за счёт их скорости;
мелкие завихрения рождают ещё меньшие завихрения,
и так далее до начала действия вязкости.

Ричардсон любил поэзию. Свою интуитивную теорию турбулентности он создал, вдохновлённый наблюдениями за эволюцией облаков и стихотворением Джонатана Свифта:

So, nat'ralists observe, a flea
Hath smaller fleas that on him prey;
And these have smaller yet to bite 'em,
And so proceed ad infinitum.
Thus every poet, in his kind,
Is bit by him that comes behind[1].

Постепенно создаётся антология «гидродинамической поэзии».

Третья парадигма ознаменовала превращение гидродинамики из чисто теоретической науки, из коллекции оригинальных, но оторванных от жизни решений в прикладную науку. Разлившаяся река стремилась войти в берега актуальной полезности.

Наиболее важным вкладом в теорию турбулентности считаются 4 работы А. Н. Колмогорова, впервые опубликованные в 1941 году. В совокупности они так и называются — «теория К-41». Колмогоров занимался турбулентностью примерно полгода, до начала войны, а затем, в связи с требованиями военного времени, занялся баллистикой. Ещё 2 работы Колмогорова относятся к 1961–1962 годам и называются «теория К-62» (см. Колмогоров, 1988).

Были ли предшественники у Рейнольдса? Разумеется, каждый человек видел турбулентность в атмосфере, в ручье, в струе воды. Полтысячи лет назад великий Леонардо да Винчи зеркально отражённым способом написал такие строки:

doue la turbolenza dellacqua sigenera
doue la turbolenza dellacqua simantiene plugho
doue la turbolenza dellacqua siposa.[2]

[1] Нашли учёные: клопа
Терзает клопиков толпа;
Порядок $(i+1)$-й в i-м —
Так кормится *ad infinitum*.
Знай: *попадёшь* и ты, поэт,
Своим потомкам на обед.
(Перевод А. Соболевского.)

[2] где турбулентность воды возбуждается
где турбулентность воды сохраняется надолго
где турбулентность воды затихает.

Хаген ещё в 1839 году установил, что характер течения воды в трубе изменяется с увеличением напора. Он считал, что при определённых условиях в потоке возникают внутренние вихри, и это приводит к повышению сопротивления, а следовательно, к уменьшению расхода воды.

Массивным блоком в основании теории турбулентности лежит теория вероятности, прекрасные исторические обзоры которой даны Ширяевым (1998) и Гнеденко (2001). Есть ли в теории турбулентности субпарадигма? Есть. Это — теория устойчивости и перехода ламинарного течения в турбулентное (рис. 1.5). Рэлею в 1880 году, В. Орру и А. Зоммерфельду в 1907–1908 годах удалось линеаризовать задачу устойчивости в частном случае плоскопараллельного движения. Большое значение имеет теория устойчивости пограничного слоя и ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое (Бэтчелор, 2000). Ко второй субпарадигме следует отнести далеко продвинутую теорию изотропной турбулентности (Бэтчелор, 1955).

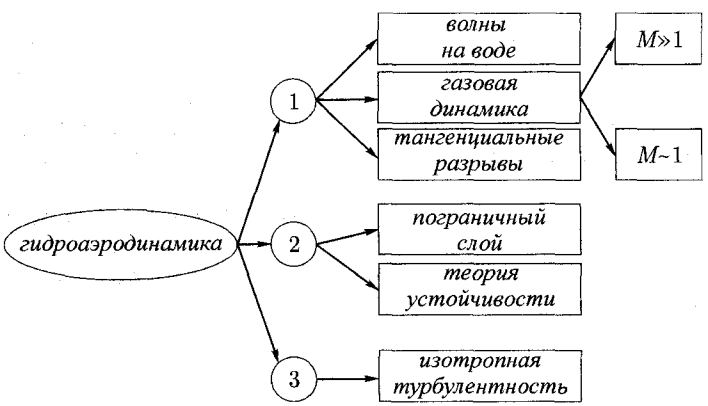


Рис. 1.5. Парадигмы (1, 2, 3) и субпарадигмы

На рубеже XIX–XX веков парадоксы теории множеств раскачали фундамент математики, а значит, и теоретической физики. Во второй половине XX века стало ясно, что основанная на детерминизме классическая гидродинамика не в состоянии решать технические задачи, связанные с развитием энергетики и транспорта. Вызрела драматическая нехватка идей. Предельно образно об этом сказал президент Международного союза теоретической и прикладной механики сэр Джеймс

Лайтхилл (1986): «Здесь я должен остановиться и снова выступить от имени широкого всемирного братства тех, кто занимается механикой. Мы все глубоко сознаём сегодня, что энтузиазм наших предшественников по поводу великолепных достижений ньютоновой механики побудил их к обобщениям в этой области предсказуемости, в которые до 1960 года мы все охотно верили, но которые, как мы теперь понимаем, были ложными. Нас не покидает коллективное желание признать свою вину за то, что мы вводили в заблуждение широкие круги образованных людей, распространяя идеи о детерминизме систем, удовлетворяющих законам движения Ньютона, — идеи, которые, как выяснилось после 1960 года, оказались неправильными». Такое признание невозможно отличить от взрыва атомной бомбы в мирном научном сообществе...

В XIX веке основной гидродинамической моделью являлась первая парадигма — модель идеальной жидкости, в XIX–XX веках — модель вязкой жидкости. В XXI веке учёные стали вплотную заниматься разработкой третьей парадигмы — построением физических и математических моделей турбулентности. Следует отметить, что третья парадигма в гидродинамике еще не сформулирована, пока видны только ее контуры... Построены математические модели случайных процессов в теории броуновского движения и в квантовой механике[1]. Однако построить адекватную модель истории человечества, макроэкономики и турбулентности пока не удалось.

Невозможно провести чёткую границу между гидродинамикой и нелинейной механикой. И там, и там важна нелинейность. Актуально как изучение гидродинамических уравнений (Буссинеска, Кортевега–де Вриза и пр.), так и решение уравнений нелинейной механики (Шрёдингера, Гинзбурга–Ландау, Синус-Гордона и пр.), которые находят важные применения в гидродинамике.

1.3. Через две революции к третьей

В середине прошлого века в точных науках свершились две революции: изобретение компьютера и разработка методов возмущений.

Усложнение математических моделей привело к тому, что человек перестал справляться с расчётами. Ответом на этот Вызов истории явилось создание компьютера. В то время казалось, что все задачи будут

[1]В отличие от гидродинамики в квантовой динамике однозначного выбора парадигм нет. Наряду с копенгагенской концепцией обсуждается теория многомерия Калуцы, теория параллельных миров Х. Эверетта, теория взаимодействия дольнего и горнего миров (Владимиров, 2002).

немедленно решены, что восторжествовал принцип пифагорейцев: «Всё есть число». Однако конец эмпирической эпохи в науке и технике не наступил, отодвинувшись на следующее столетие.

Современный компьютер позволяет решать сложные задачи гидродинамики, физики плазмы, анализа загрязнения воздуха и грунтовых вод, создания новых лекарств, составления карт озонового слоя, сейсмического анализа. Численные расчёты востребованы как в фундаментальных науках, так и в прикладных. Для учёных и инженеров численный расчёт стал обыденным и мощным оружием наступления на непознанное. Численные расчёты практически вытеснили из употребления такие эмпирические методы, как приближения Бубнова – Галёркина[1] в теории пограничного слоя, методы типа Бетца – Мультхопа в теории крыла большого удлинения, полуэмпирические методы в теории турбулентности и т. д. В настоящее время разработаны надёжные методы расчёта ламинарных течений, однако *безэмпирический расчёт* турбулентных течений пока ещё невозможен.

Вычислительная гидродинамика — основная часть вычислительной математики, ибо в ней, как ни в одной области физики, задействована нелинейность и, как следствие, турбулентность.

История методов возмущений, как и история самой гидродинамики, восходит к Л. Эйлеру. Выдающийся вклад в асимптотологию внесли также такие гиганты, как Лаплас, Пуанкаре, Прандтль (см. Ван-Дайк, 1967; Коул, 1972; Найфе, 1984; Андрианов, Маневич, 1994). Многие исследователи в прошлом применяли технику асимптотических разложений, пользуясь скорее интуитивными, чем математическими соображениями. Бурное развитие методов возмущений в прикладной математике началось с середины прошлого века, когда П. Лагерстром и его ученики (С. Каплун, Г. Латта, М. Ван-Дайк, Дж. Коул) систематизировали материал и обосновали некоторые процедуры. Уизем (1977) и Лайтхилл (1981) разработали свои оригинальные подходы к решению нелинейных задач, а российские учёные Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский (1958) создали метод усреднения[2] в теории нелинейных колебаний.

Если численные методы являются для учёного лишь техническим инструментом анализа, то методы возмущений остаются источником творчества и вдохновения.

---

[1]Как называть метод ортогонализации? Хотя приоритет принадлежит выдающемуся русскому инженеру И. Г. Бубнову (1872–1919), его чаще называют методом Галёркина (см. Рассол, 1999).

[2]Метод *усреднения* или метод *осреднения*? В этом вопросе нет единого мнения: Арнольд (1997а) считает правильным первый вариант, Монин и Яглом (1996) — второй.

Грядущая третья революция — это решение проблемы турбулентности. Современные хаотисты (М. Фейгенбаум, Д. Рюэлль, Ф. Такенс и др.) добывают результаты с помощью компьютерных экспериментов (Глейк, 2001).

Гидродинамики любят повторять шутку о том, что, представ перед Создателем, они прежде всего попросят Его раскрыть тайну турбулентности. Г. Ламб и Т. Карман уже узнали эту тайну... Выдающийся физик В. Гейзенберг, серьёзно занимавшийся проблемой турбулентности, признался на смертном одре, что хотел бы задать Господу два вопроса — об основах теории относительности и о причине турбулентности. «Думаю, что Господь ответит мне на первый из них», — галантно заключил он.

В отличие от Великой теоремы Ферма, доказанной конкретным учёным (профессором Э. Уайлсом в 1993 году), проблема турбулентности решится коллективно с помощью численных методов. Для численного решения этой сверхзадачи сначала применялся метод прямого численного моделирования DNS (direct numerical simulation). Но вскоре выяснилось, что при этом обрезается энергетический спектр из-за невозможности учёта мелких вихрей. Тогда решили статистически аппроксимировать мелкомасштабное движение и учесть его с помощью так называемого *подсеточного моделирования*. На основе такого подхода родился метод численного расчёта больших вихрей LES (large eddy simulation), удачно сочетающий возможности синтеза машины и человека, то есть численного расчёта и асимптотического анализа одного из самых сложных физических явлений — турбулентности.

В. Л. Гинзбург (2001) поместил проблему турбулентности на одиннадцатое место среди тридцати, на его взгляд, основных проблем физики, соединив ее с проблемами нелинейной физики.

Как будет развиваться гидродинамика в дальнейшем? Есть два прогноза. Первый (революционный) предсказывает появление в недалёком будущем принципиально новых математических методов анализа, приспособленных для изучения турбулентности. Второй прогноз (эволюционный) предсказывает постепенное усовершенствование метода LES в результате как повышения мощности компьютеров, так и улучшения подсеточного моделирования. Таким образом, для покорения пика «Навье – Стокс» есть 2 профетических маршрута: чисто математический и вычислительный. В любом случае очевиден кризис гидродинамики: фундаментальные проблемы отданы на откуп математикам.

Математическая модель должна учитывать два достаточно новых и ещё не изученных феномена: фрактальность процесса и наличие *супер-*

слоя Корсина (см. Корсин, Кистер, 1955). Оба этих феномена являются настоящим вызовом традиционной гидродинамики.

С легкой руки Е. Вигнера (2002) распространено мнение о «непостижимой эффективности математики». Во многих разделах точных наук она непостижимо эффективна, но только не в гидродинамике...

Глава 2

Опыт

Технические науки не всегда развиваются под воздействием фундаментальных, как это показано на рис. 2.1. Развитие науки и техники не скоординировано. С античных времён экспериментальная динамика жидкости, называемая тогда гидравликой, в своём развитии опережала теоретическую динамику жидкости. Опытным путём строились вёсельные суда, водяные часы, надувные мехи, водяные мельницы, системы водоснабжения и, наконец, паровые машины (Роуз, Инс, 1957; Токати, 1971). Существовавшая во времена братьев Райт формула для коэффициента сопротивления пластины ($c_x \approx 0.88$), полученная в рамках теории течений со свободными границами, давала в два (!) раза меньшее значение, чем полученное экспериментально. Если бы братья Райт поверили теории, то их полёт оказался бы невозможным. Весьма вероятно, что по этой же причине не взлетел «воздухоплавательный снаряд» контр-адмирала А. Ф. Можайского.

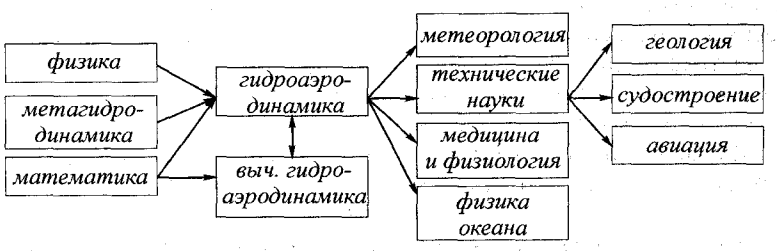


Рис. 2.1. Связь гидродинамики с другими науками

«Существеннейшей особенностью эмпирической эпохи в технологии было не столько отсутствие теории, сколько её вторичность. Сначала возникла паровая машина, а потом термодинамика; сначала самолёт, а потом теория полёта; сначала строили мосты, а потом научились их

рассчитывать» (Лем, 1968). Не так просто найти исключение из известного афоризма: техника развивается не благодаря теории, а скорее вопреки ей. Этот афоризм оправдывает как само разделение гидродинамики на теоретическую и экспериментальную, так и несколько мрачную шутку американского гидродинамика Г. Биркгофа о разделении учёных на теоретиков, которые изучают то, что нельзя наблюдать, и экспериментаторов, которые наблюдают то, что нельзя изучать.

Гидродинамика как наука зародилась гораздо раньше, чем авиация. Этому способствовало не только обычное человеческое любопытство, но и потребности практики. В отличие от гидродинамики, не имеющей точной даты своего рождения, авиация родилась 17 декабря 1903 года, когда братья Райт подняли в воздух свой самолёт «Флайер-1» с бензиновым поршневым двигателем мощностью 9 кВт и двумя толкающими воздушными винтами и пролетели на нём 260 метров. Ни развитие двигательных судов, ни случившаяся гораздо позже революция в ракетной технике не оказали такого мощного влияния на гидродинамику, как появление авиации. Сразу же раздвинулись границы непознанного. Обнаружилось, что о природе движения тел в жидкости и в воздухе почти ничего не известно.

Гидродинамика, как и вся физика, основана на опыте. Из опыта выводятся законы. Возможна инверсия: сначала выводится закон, затем ставится подтверждающий его опыт. «Опыт — единственный источник истины: только опыт может научить нас чему-либо новому, только он может вооружить нас достоверностью» (А. Пуанкаре). Продолжить эту цитату уместно словами А. Эйнштейна: «Конечно, опыт остаётся единственным критерием пригодности математических конструкций физики. Но настоящее творческое начало присуще именно математике. Поэтому я считаю в известном смысле оправданной веру древних в то, что чистое мышление в состоянии постигнуть реальность».

Во всех опытных науках (физике, химии, астрономии, биологии, психологии) истина устанавливается с помощью научного эксперимента — основного добытчика фактов. Науку составляют факты, систематизированные с помощью физических и математических моделей. Все точные науки, включая математику, основаны на опыте. Эксперименты Фарадея, Майкельсона, Герца и Менделя стали зачаточными для становления таких наук, как электродинамика, теория относительности, квантовая механика и генетика.

Гидродинамика — наука о моделировании. Вся её история подтверждает этот тезис. Существуют три взаимосвязанных вида моделирования: экспериментальное, физическое и математическое.

2.1. Классификация

Классифицировать эксперимент можно по различным признакам: достоверный — недостоверный, корректный — некорректный и т. д.

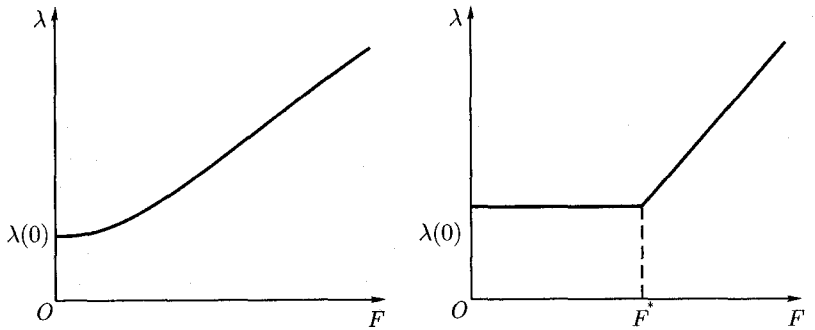
Если о природе изучаемого явления ещё не выдвинуто никакой гипотезы (версии), то говорят о поисковом эксперименте. Если осталась одна гипотеза, то эксперимент, проводимый с целью её проверки, называют контрольным. Наконец, если существует несколько гипотез, то эксперимент, проводимый с целью отбора одной из них, называют решающим. Ф. Бэкон назвал такой эксперимент — experimentum crucis (crux — крест, указатель дорог). П. Дюгем показал, что в точных науках решающий эксперимент невозможен. Он не устанавливает истинность какой-либо теории, а только намечает путь дальнейшего поиска.

Кроме разделения экспериментов по целевому назначению, в гидродинамике используется их формальное разделение на количественные и качественные. В результате проведения первого добываются цифровые данные, сразу же пригодные для математической обработки, а в результате проведения второго определяется «геометрия» течения — например, поле траекторий частиц жидкости. Результаты качественного эксперимента иллюстрируются фотографиями и зарисовками, результаты количественного эксперимента представляются в виде графиков или таблиц. Количественный эксперимент обычно является «чёрным ящиком»: регистрируется лишь выходной эхо-сигнал некоторого воздействия на исследуемый объект, природа которого остаётся неизвестной.

Научный эксперимент подразумевает повторяемость. Условия двух разных опытов никогда в точности не совпадают. Поэтому условием любого научного опыта подразумевается структурная устойчивость наблюдаемого процесса[1].

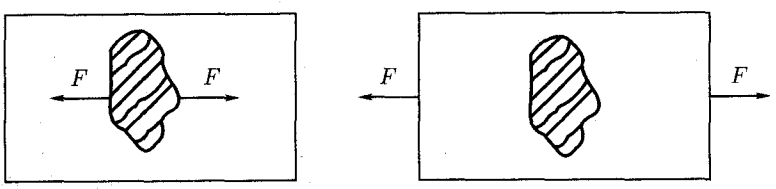
Опыты бывают контролируемыми и неконтролируемыми. Если деформация (следствие) λ зависит от силы (причины) F таким образом, что $d\lambda/dF = O(1)$, то процесс контролируемый, то есть предсказуемый (рис. 2.2 *а*). Если указанная производная велика, то процесс неконтролируемый (рис. 2.2 *б*). Непредсказуемость присуща неконтролируемым процессам. Известный простейший пример на эту тему — развитие трещины в газетном листе. Когда сила приложена к краям предварительно образованной дырки (рис. 2.3 *а*), то процесс контролируем, но когда сила прилагается к краям листа (рис. 2.3 *б*), то процесс неконтролируем.

[1]Структурная устойчивость — это нечувствительность математической модели к малым возмущениям. Первое понятие структурной устойчивости в теории дифференциальных уравнений ввели А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин в 1937 году. Введение трения может превратить устойчивую неконсервативную систему в неустойчивую.



а) *б*)

Рис. 2.2. Контролируемый (*а*) и неконтролируемый (*б*) процессы



а) *б*)

Рис. 2.3. Развитие трещины в листе бумаги — пример контролируемого (*а*) и неконтролируемого (*б*) процессов

В контролируемом опыте влияние внешних воздействий исключено, параметры эксперимента изменяются по воле исследователя. Сделать опыт контролируемым значит изолировать его от окружающих условий (Шенк, 1972).

Зависимость и независимость — два основных начала мироздания. «Понятие независимости двух или нескольких опытов, — считает А. Н. Колмогоров, — занимает в известном смысле центральное место в теории вероятности».

Два опыта называют зависимыми, если результаты одного зависимы от результатов другого или от самого факта его проведения. В противном случае опыты считаются независимыми. Гидродинамические опыты независимы, если они разделены по времени. Так, перед экспериментом в *опытовом бассейне* проходит много часов, пока не затухнет волнение воды, инициированное предыдущим экспериментом.

В рамках теории эксперимента разрабатываются методики испытаний, прогнозируются результаты. Какое явление можно моделировать в опыте, а какое нельзя? На этот счёт бытует негласное мнемоническое правило: если явление моделируется по одному безразмерному определяющему параметру, то моделирование осуществить легко; если по двум параметрам, то его осуществить можно; если по трём параметрам, то его осуществить трудно. Усложнение — это недоступность, упрощенчество — это вульгаризм.

Научные опыты, как и теории, бывают «хорошие» и «плохие». Первые из них отбираются с течением времени: достаточно было появиться концепции Прандтля о пограничном слое, как сотни «плохих» опытов канули в Лету.

Что «главнее» — теория или эксперимент? Декарт на первое место ставил теорию, считая, что наши наблюдения несовершенны. Галилей же, напротив, полагал, что теория должна строиться на основе наблюдений. Ньютон выводил свои законы из созданной им умозрительной теории, Кеплер — из наблюдений.

Современная метафизика примиряет оба подхода: теория и опыт взаимозависимы и взаимосвязаны. Познание начинается с наблюдений и проверяется опытом, но немыслимо без спекулятивных заключений.

Известны два ярких примера, когда теории отвергались как не соответствующие опыту.

Стокс первым решил задачу об установившемся движении вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе (течение Хагена–Пуазейля) и в плоском канале (течение Куэтта). Однако он отказался от публикации результатов, так как посчитал, что его теория противоречит опытным данным Боссю и Дюбуа. Как выяснилось впоследствии, Стокс не учел, что эти опыты проводились в условиях развитой турбулентности, а его теория описывала ламинарное течение.

Второй пример. В 1910 году С. А. Чаплыгин на заседании Московского общества воздухоплавания предложил схему обтекания крыла большого удлинения. Это произошло за два года до появления посвященной этому же вопросу основополагающей работы Л. Прандтля. Однако Чаплыгин не опубликовал свои результаты, ибо посчитал их несоответствующими опытным данным.

Как относиться к дилемме теория–опыт? Двояко. С одной стороны, проверка эмпирической теории сравнением с опытом необходима. С другой стороны, опытным путем установлена справедливость уравнения Навье–Стокса в широком диапазоне условий. Поэтому *строго математическое решение* этого уравнения можно не сверять с экспе-

риментом: совпадение окажется настолько точным, насколько условия опыта соответствуют условиям, при которых существует решение.

Бэкон, автор спорного тезиса «знание — сила», думал, что наблюдаемый нами мир не зависит ни от самого наблюдателя, ни от его приборов. Замеры считались объективной данностью, отражающей с точностью до погрешностей эксперимента законы Природы. Первым против такой точки зрения восстал Э. Мах. А смертельный удар бэконовской теории нанесла квантовая механика. В эксперименте, согласно принципу Галилея, идеализируются внешние условия, игнорируются второстепенные факторы, чтобы выкристаллизовать искомую зависимость. Важен не только объект познания, как в классическом естествознании, но и объект измерения. Влияние прибора и личности экспериментатора особенно проявляется при диагностике турбулентных режимов. По современным воззрениям, замеры — это не объективная данность, не законы природы, а законы естествознания.

Если временно взять за основу эстетический критерий, то можно отобрать 5 выдающихся научных фотографий. Но сначала следует поговорить об истории фотографического метода в науке, вообще, и в гидродинамике, в частности.

Фотографию изобрели три человека: Н. Ньепс, Ж. Дагер и Ф. Тальбот. Первый изобрёл гелиографию в 1826 году, второй — реальное фотографирование в 1839 году, третий разработал принцип негативно-позитивного процесса в 1840 году. Фотография сразу же стала «служанкой науки». Великолепная коллекция из 100 оригинальных научных фотографий собрана сотрудником лондонского Музея науки Дж. Дариусом (1986).

В гидродинамике фотография сыграла ключевую роль в становлении топологических методов. Всё началось с того, что в 1888 году Э. Мах сфотографировал по методу полос сверхзвуковой полёт выпущенной из малокалиберного пистолета пули. Его предположение о том, что ударные волны возникают, едва скорость пули превысит скорость звука, оказалось правильным. Этот уникальный снимок воспроизведён на рис. 2.4. На основании этих опытов Мах сформулировал закон, который нередко подают в виде следующего каламбура. *Закон Маха: синус угла Маха обратно пропорционален числу Маха.* Пять лет спустя Мах измерил интенсивность ударной волны, используя прибор, сделанный его сыном Людвигом, врачом по профессии. Теперь этот прибор известен как интерферометр Маха – Цандера.

Опыты Маха развеяли два мифа: первый, восходящий к Аристотелю, миф о том, что за пулей образуется вакуум, и второй миф о том,

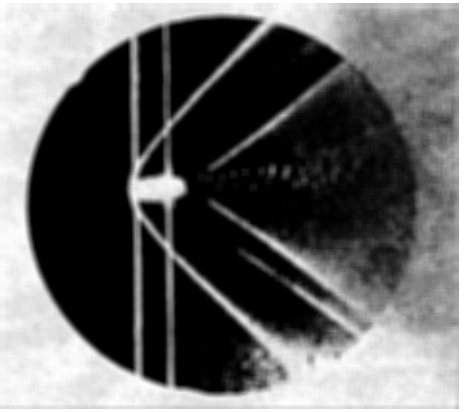


Рис. 2.4. Пуля Маха

что рану причиняет сжатый воздух, сконцентрированный впереди пули. Память о выдающемся гидродинамике сохранена на века — в Пражском университете имеется музей Эрнста Маха.

Сам Мах к своим работам по гидродинамике относился как к второстепенным. Он был и остался великим философом, сформулировавшим первопринципы наук (см. Захаров, 2003). Эйнштейн считал его своим единственным учителем.

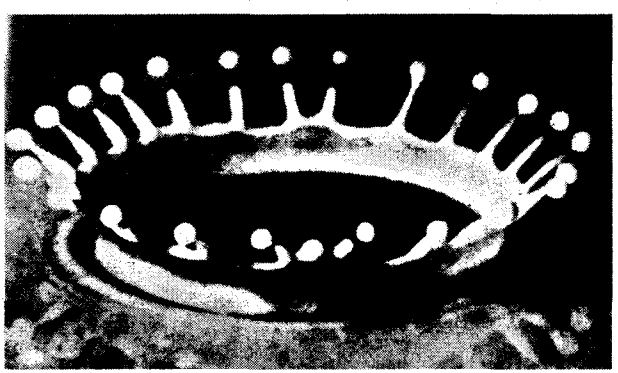


Рис. 2.5. «Корона», возникающая при падении капли молока на плоскость

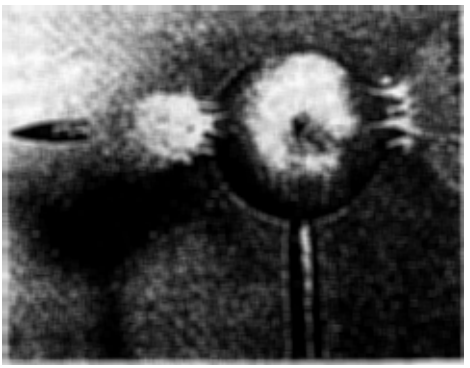
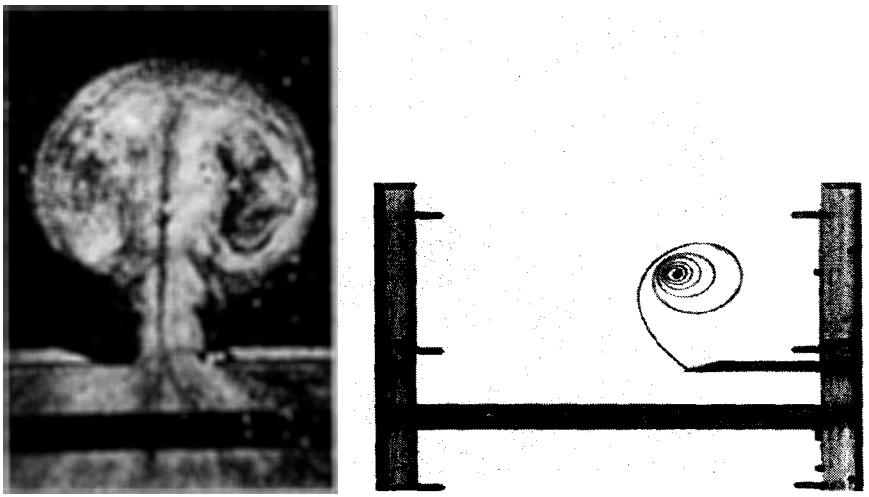


Рис. 2.6. Пуля, пронизывающая яблоко

Первые фотоснимки брызг получил в 1894 году проф. Королевского колледжа в Девенпорте А. Уортингтон. Однако классической, вошедшей во многие учебники по гидродинамике, стала фотография «короны», сделанная Г. Эджертоном, профессором Массачусетского технологического института и изобретателем современного стробоскопа. Она образуется при падении капли молока на тарелку (рис. 2.5). Такой быстропротекающий процесс для нашего глаза недоступен. Книга Эджертона, содержащая более 250 фотографий, так и называется — «Наблюдая невидимое». Вторая фотография Эджертона (рис. 2.6) демонстрирует прохождение пули сквозь яблоко. Кажется, что остановилось мгновенье.

На рис. 2.7*а* изображено грибовидное облако. Вы думаете, что это развитие атомного взрыва? Нет, это всего лишь начальный этап истечения окрашенной чернилами воды из щели постоянной ширины, заснятый в вертикальной гидродинамической трубе. Спиральная структура отрывного течения выявлена при подаче красителя только на кромку щели (рис. 2.7*б*). Второй кромки здесь нет — можно считать, что исследовалось истечение из полущели. Картина похожа на разгонный вихрь Прандтля.

Коллекция выдающихся гидродинамических опытов — каталог золотого фонда гидродинамики — собрана проф. Стэнфордского университета Милтоном Ван-Дайком, обратившимся к известным экспериментаторам планеты с предложением прислать ему фотографии наиболее интересных течений. Они прислали, и таким образом в 1982 году появился на свет «Альбом течений жидкости и газа» Ван-Дайка — шедевр одновременно популярной и научной литературы по гидродинамике.



а) *б)*

Рис. 2.7. Начальная стадия истечения жидкости из щели: *а* — все верхнее полупространство первоначально было окрашено; *б* — краситель подавался на кромку щели

На представленной на рис. 2.8 фотографии, взятой из альбома Ван-Дайка, визуализировано вторичное течение, индуцированное цилиндром, колеблющимся в смеси воды с глицерином. Направление колебаний обозначено стрелками. Впечатляет разделение течения на внутреннее, прилегающее к цилиндру, и внешнее, каждое из которых содержит четыре вихря.

В работе Рида (1991) приведены 30 великолепных фотографий течений жидкости, получивших премии на 8-м ежегодном конкурсе по гидродинамике.

2.2. Мысленный эксперимент

По целевому назначению эксперимент подразделяется на научный, промышленный и мысленный. Мысленный эксперимент (Пайерлс, 1983; Кадомцев, 1999) либо ниспровергает выдвинутую гипотезу (цикл Карно), либо ставит проблему (демон Максвелла, кот Шрёдингера), либо иллюстрирует её (γ-микроскоп Гейзенберга), либо демонстрирует логический парадокс (парадокс Эйнштейна – Подольского – Розена).

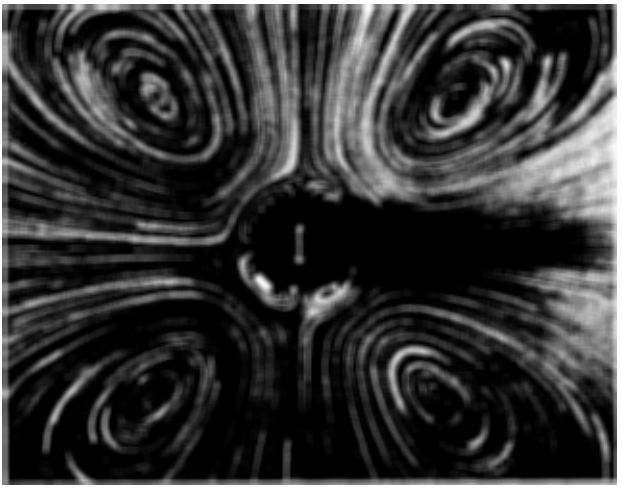


Рис. 2.8. Течение в окрестности колеблющегося цилиндра

Каждый экспериментатор перед проведением опыта «прокручивает» в уме его методику и последствия, варьирует его условия. Мысленно совершается полный обзор всевозможных исходов. Без умственного эксперимента были бы невозможны открытия Галилея, Коперника, Кеплера, Карно, Фурье, Кирхгофа.

А. Эйнштейн (2001) мысленный эксперимент называет идеализированным экспериментом. «Закон инерции является первым большим успехом в физике, фактически ее действительным началом. Он был обнаружен при размышлении над идеализированным экспериментом, над телом, постоянно движущимся без трения и без воздействия каких-либо других внешних сил. Из этого примера, а позднее из многих других, мы узнали о важности идеализированного эксперимента, созданного мышлением. < . . . > Едва ли нужно напоминать, что это идеализированный эксперимент, который нельзя выполнить в действительности, но который легко можно себе представить».

Если умственный эксперимент не приводит к твердо установленным выводам, то в качестве его продолжения используется метод догадок. Его не следует считать научным, поскольку он представляет собой лишь набор возможных гипотез.

«Нет никакого сомнения, — пишет Э. Мах (2003), — что умственный эксперимент играет важную роль не только в физике, но и во всех

областях науки и даже там, где человек, далекий от нее, менее всего это подозревает, в математике... На тесном примыкании мышления к опыту строится современное естествознание».

Если физический мысленный эксперимент служит выяснению сущности задачи путём редукции её к упрощённой, то в гидродинамике мысленный эксперимент подменяет промышленный, помогая сэкономить значительные средства. Суть его заключается в том, что инженер-исследователь предсказывает с некоторым правдоподобием решение проблемы, основываясь на аналогиях, накопленном опыте и интуиции. Особенно эффективен такой метод при опросе группы экспертов и осреднении их субъективного прогноза (так называемый «дельфийский метод» — по имени античного оракула в Дельфах). Мысленный эксперимент незаменим при установлении топологии течения (см. Бетяев, 2001).

2.3. Аэрогидродинамический эксперимент

Условно различают «большую науку» и «малую науку». Малой наукой занимаются малые коллективы или даже одиночки за малые деньги. Большая наука способствует осуществлению грандиозных проектов — строительству суперколлайдеров, космических кораблей, ядерных установок. Без большой науки, в частности, невозможно создание самолётов, морских судов и ракет.

В XIX веке вызрела и осуществилась идея о проведении количественных измерений в специально созданных аэрогидродинамических установках, оснащённых современной аппаратурой. Аэрогидродинамический эксперимент — это промышленный эксперимент, целью которого является параметрическая оптимизация формы движущегося в сплошной среде тела. Параметрический поиск является либо направленным, когда имеется сужающий поисковое пространство алгоритм отбора нужного (оптимального) решения, либо — массовым, когда такого алгоритма нет, всё параметрическое пространство «прощупывается» простым перебором.

В соответствии с принципом относительности используются два эквивалентных способа организации потока: движение модели в покоящейся среде либо, наоборот, обтекание покоящейся модели движущейся средой.

В гидродинамическом эксперименте исследуется взаимодействие тел с водой. Он проводится в гидродинамических бассейнах, гидродинамических каналах и в гидродинамических трубах. Гидробассейн — это море в миниатюре, по которому буксируются модели судов, то есть

их уменьшенные копии. Здесь исследуется движение кораблей, гидросамолётов и их взаимодействие со свободной поверхностью воды. В гидроканале имеется специальная тележка, движущаяся по установленным над каналом рельсам и буксирующая модель гидросамолёта; проводится кинофотосъёмка картины обтекания и измерение действующих на модель сил и моментов.

С помощью аэродинамических труб удалось в течение одного века пройти трудный путь от первых примитивных самолётов до современных авиалайнеров.

Задача организации в аэродинамической трубе потока, максимально приближенного к реальным условиям, оказалась неимоверно сложной. Насколько легко соблюсти подобие по числу Маха, настолько трудно соблюсти подобие по числу Рейнольдса. Но самым крепким орешком оказалось моделирование так называемого «невозмущённого потока». Возникла принципиально новая задача о моделировании явления не по нескольким определяющим параметрам, а по определяющим функциям. Возмущения в трубе значительно отличаются от возмущений в атмосфере. Имитировать атмосферную турбулентность в трубе практически невозможно. В специально созданных *малотурбулентных* трубах уровень пульсаций в набегающем потоке значительно снижен, но об удовлетворительном моделировании атмосферных возмущений говорить ещё рано.

Из синергетики известно, что если система находится в неустойчивом состоянии, то влияние малых возмущений становится существенным. При обтекании тела слабовязким потоком на некотором участке его поверхности имеется область, где поток становится неустойчивым, ламинарное течение переходит в турбулентное. Именно здесь влияние атмосферных или трубных возмущений имеет решающее значение.

Кроме того, в реальном полёте аэродинамические моменты деформируют крыло. Лопасти вертолёта на стоянке свисают почти на метр, а в полёте распрямляются. Поэтому в аэродинамической трубе должны моделироваться происходящие в полёте изменения конструкций.

Наряду с трубным экспериментом в условиях полёта проводится так называемый натурный эксперимент. Однако такой эксперимент дорог и менее универсален, чем трубный.

2.4. Аэрогидродинамическое проектирование

Решая сложную вариационную задачу о выборе оптимальной формы летательного аппарата, конструктор исходит из его назначения. Аэроди-

намическое проектирование, основанное на эксперименте, теории, интуиции и вычислительной аэродинамике, представляет собой прикладную науку многопараметрической оптимизации и искусство компромиссов между идеалом (аэродинамически совершенным телом) и реальностью (техническими возможностями, ресурсами, весом, ценой и т. д.).

В аэродинамическом проектировании используется дарвиновский принцип эволюции: каждое новое поколение летательных аппаратов является улучшением предыдущего. Теория предоставляет конструкторам лишь принципиальные научные идеи, имеющие стратегическое предназначение (Бетяев, 2003): эффект скольжения, биплан Буземана, ламинаризация крыла, правила площадей (дозвуковое, трансзвуковое, сверхзвуковое) и пр. Обтекание твердой поверхности — настолько сложное явление, что теория не в состоянии дать ему количественное объяснение. Численные расчеты также не пользуются абсолютным доверием. Поэтому основное значение в аэродинамическом проектировании летательного аппарата приобретает аэродинамический эксперимент.

Задача аэродинамического проектирования летательного аппарата сводится к определению оптимальной формы его (верхней и нижней) поверхности $y = f^{\pm}(x, z)$ и ее обводов. Функционалом может быть маневренность аппарата, безопасность полета, экология, точность попадания в цель, экономическая эффективность, заметность и пр. Особенно сложная вариационная задача возникает, когда функционалом выбирается совокупность различных требований.

Рассмотрим конкретный пример — проектирование самолета. Оно разделяется на 7 следующих этапов.

1. *Выбор начальной формы крыла* (*нулевого приближения*).

Такое крыло может состоять из одинаковых профилей, оптимизированных по выбранному функционалу.

2. *Итерация формы крыла с помощью аэродинамического эксперимента и численных расчетов* (Кюхеман, 1983).

3. *Выбор концевой аэродинамической поверхности крыла* (*винглета*).

Идея использования винглетов с целью снижения индуктивного сопротивления запатентовал еще основатель теории крыла Ф. Ланчестер. Сначала она была реализована на самолетах с двухкилевой схемой оперения, где функции киля и винглета совмещены. Оптимальная форма винглета неизвестна. Кроме классических (килевых) винглетов предложены *спиральные винглеты*, имеющие форму концевого вихря, и *перьевые винглеты*, имитирующие законцовки птичьих крыльев. Инженеры

задаются некоторой простой формой винглета и оптимизируют ее по одному-двум геометрическим параметрам с помощью численных расчетов и/или аэродинамического эксперимента. Разнообразие форм законцовок свидетельствует об отсутствии концепций их проектирования и о сложности этого этапа проектирования.

4. *Моделирование аэроупругих свойств крыла* (Фершинг, 1984).

Уже отмечалось, что в реальном полете крыло самолета изменяет свою форму вследствие упругих свойств. Кроме того, под воздействием аэродинамических нагрузок оно может быть подвержено нестационарным колебаниям. Все это должно учитываться при проведении специальных экспериментов.

Таким образом проектируется изолированное крыло.

5. *Сочленение крыла с фюзеляжем.*

Обычное требование к фюзеляжу заключается в том, чтобы он обладал минимальным сопротивлением. Теория здесь особенно бессильна. Даже в простейшем случае линейной сверхзвуковой теории задача об определении тела минимального волнового сопротивления (оживала Кармана и Хаака – Сирса) некорректна.

«Правильная» интеграция крыла с фюзеляжем позволяет избежать срывов потока и возникновения вредных скачков уплотнения.

На этом этапе выбирается схема сочленения (низкоплан, среднеплан, высокоплан) и распределение местных углов поперечной V-образности крыла.

6. *Улучшение аэродинамических характеристик отдельных элементов самолета* (механизации крыла, органов управления, подвесок, надстроек, двигателей, воздухозаборников и т. д.).

Устранение лишних уступов, щелей, установка вихрегенераторов, улучшение отделки поверхности самолета — все это составляет предмет усилий так называемой «местной аэродинамики». Она позволяет значительно повысить летучесть самолета (отношение подъемной силы к силе сопротивления) — приблизительно на 10 %.

На этой стадии проектирование расчленяется на ряд $(10 \div 20)$ автономных задач, которые исследуются с помощью численных расчетов и трубных экспериментов.

7. *Натурный эксперимент.*

На этой стадии самолет испытывается в полете.

Конструктор должен предусмотреть эксплуатацию самолета в нештатных ситуациях: обледенение крыла, попадание в дождь, в порыв, столкновение с воздушным вихрем и пр.

Считается, что революционные изменения в авиацию внесет внедрение системы отсоса пограничного слоя с целью ламинаризации течения и затягивания отрыва. Теория предсказывает значительные достижения в этом направлении при малых энергетических затратах. Однако отсос пограничного слоя до сих пор не применяется в авиационной практике из-за трудностей, возникающих при его эксплуатации.

С давних пор люди мечтали о полете. Петр I ошибся в сроках прогноза, но не в самом прогнозе, когда утверждал: «Не мы, а наши правнуки будут летать по воздуху, ако птицы». История аэродинамического проектирования самолета начинается с англичанина Дж. Кейли (1773–1857), выдвинувшего в 1799 году идею о проектировании самолета классического типа, отказавшись от господствующей идеи создания самолета-орнитоптера, подражающего полету птиц.

Первым «летающим человеком» считается немецкий инженер О. Лилиенталь (1848–1896). Будучи конструктором планеров, ученым и летчиком в одном лице, он пожертвовал своей жизнью ради того, чтобы понять принципиальные основы механики полета.

Триумфом аэродинамического проектирования, как уже отмечалось, стал полет американских авиаконструкторов братьев Райт.

В прошлом веке в Германии трудились такие известные авиаинженеры, как А. Бетц, А. Гетерт, М. М. Мунк, а в NASA — И. Д. Джейкобс и Р. Т. Уиткомб. В настоящее время проблемами аэродинамического проектирования успешно занимается созданная в США группа AGARD (Advisory group for aerospace research and development).

«Мы можем предвидеть самые многообещающие достижения в авиации в целом и в аэродинамическом проектировании в частности, значительные усовершенствования самолетов существующих типов и создание новых основных типов. Перед нами предстает целый *спектр самолетов* с всемирной сетью маршрутов, в которой расстояния характеризуются часами. Это сможет благоприятно отразиться на образе нашей жизни, и авиация может играть существенную роль в решении задач управления окружающим миром и гармонии человека с ним. Никогда ранее технические и социальные перспективы в авиации не были столь разнообразны и многообещающи. Впереди еще очень долгий путь» (Кюхеман, 1983).

Глава 3
Математическое моделирование

Описание результатов мышления и явлений в точных понятиях называется *формализацией*. Конкретную формализацию объекта или явления, отражающую те или иные его свойства с заданной точностью, называют *моделью* объекта или явления. Модель — это виртуальная реальность, созданная человеком с помощью знаков (Агеев, 2002). Процесс создания моделей называется *моделированием* и представляет собой один из основных методов познания реальности. При моделировании реальный объект заменяется приближенным объектом таким образом, чтобы выделенные характеристики обоих были сопоставимы. Перефразируя слова Пикассо об искусстве, можно сказать: «Моделирование — это ложь, которая помогает понять нам правду».

3.1. Основные принципы

Сначала строится физическая модель течения, состоящая из двух компонент: модели среды (капельная жидкость, газ, смесь, дисперсная среда, релаксирующая и пр.) и модели гидродинамического поля (двумерное — трёхмерное, вихревое — безвихревое, вязкое — невязкое, стационарное — нестационарное, детерминированное — случайное и пр.). Структура математического моделирования показана на рис. 3.1.

При построении моделей широко применяются различные эмпирические принципы. Перечислим некоторые из них.

Бритва Оккама (принцип максимальной простоты): «Напрасно пытаться сделать посредством большего то, что может быть сделано посредством меньшего».

Принцип Ньютона: не следует создавать физические или математические модели, которые не имеют приложений. Давать объяснения следует только наблюдаемым причинам.

Принцип дополнительности Бора: две взаимоисключающие концепции, имеющие различные области применимости, могут не исклю-

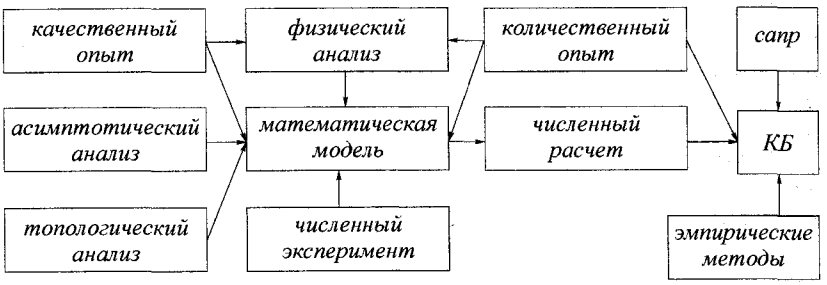


Рис. 3.1. Структурная схема математического моделирования

чать, а дополнять друг друга. Так, дискретные и непрерывные математические модели являются дополняющими друг друга идеализациями.

Принцип соответствия Бора: математическая модель, учитывающая новый эффект, при уменьшении этого эффекта должна переходить в ранее известную модель. При предельном значении параметров $(0, 1, \infty)$ *новая* математическая модель должна соответствовать *старой* математической модели.

Принцип неопределенности допускает введение таких «размытых», неопределенных понятий, как отрыв, турбулентность и т. д.

Принцип сходимости подразумевает повторяемость и воспроизводимость как опыта, так и численного расчета.

Принцип запрета накладывает известные физические ограничения сверху и снизу на гидродинамические величины и на пространственно-временной масштаб течений. Так, в масштабе длин $O(\mathrm{Re}^{-1})$ и времени $O(\tau)$, где τ — время свободного пробега, нарушается концепция сплошной среды.

Принцип Дирака утверждает, что каждая модель явления должна иметь эстетическую привлекательность.

Принцип достоверности Д. Юма (1711–1776): чем больше данных подтверждают теорию (математическую модель), тем выше представляется степень ее достоверности, однако полная достоверность недостижима.

Согласие теории с опытом еще не свидетельствует об ее окончательной истинности. Такое согласие обнаружится в случае, когда ошибки теории и опыта скомпенсированы. Точно так же и расхождение теории и опыта нельзя трактовать как явное опровержение теории. В этой связи возникает *проблема Дюгема* (Дюгем, 1910).

Дано множество предпосылок, содержащих множество выводов. Некоторые выводы опровергаются опытом. Задача состоит в том, чтобы выделить то подмножество предпосылок, на которых базируется это опровержение, с целью заменить их более адекватными предпосылками.

Эмпирическая верификация теорий является сложным занятием, поэтому более предпочтительны спекулятивные проверки непротиворечивости теорий.

Физическая модель

Созданию модели явления предшествует системный анализ объекта моделирования, с помощью которого выделяются составляющие этого объекта, устанавливаются физические связи между ними. Спекулятивную физическую модель, полученную из первых принципов физики, нельзя считать строго теоретической, ибо сама теория выведена из опыта. Физические модели, полученные из опыта, называются *эмпирическими* или феноменологическими. Физические модели, полученные и из опытных, и из теоретических данных, называют *полуэмпирическими*.

Закон, не являющийся определением, справедлив (с какой-то погрешностью) лишь при «нормальных условиях». Закон, являющийся определением, абсолютно точен. Так, определяя «инерционную» массу из второго закона Ньютона, мы признаём его абсолютно точным, даже если помним о его релятивистской трактовке.

Формулировкой аксиоматической структуры, позволяющей логически обосновать построение математических моделей, занимается так называемая *рациональная математика* (Трусделл, 1975), являющаяся скорее частью математики, чем механики. Поскольку уравнение Навье – Стокса является в некотором смысле следствием уравнения Ньютона $f = ma$, аксиоматика физической модели гидродинамики сводится прежде всего к аксиоматике классической механики, которая хорошо известна (Захаров, 2003).

Истинная структура среды многоуровневая. Великий астроном Артур Эддингтон выделял несколько уровней реальности, считая, что стул существует таким, каким мы его воспринимаем. Это — один уровень. Но есть другие уровни его микроструктуры: уровень молекул, уровень элементарных частиц и т. д. Эти подуровни отличаются друг от друга разными масштабами, их описывают разные физические модели.

М. Планк подчёркивал, что физическая модель отличается от мира так же, как географические карты — от поверхности земли. Перевод

физической формулировки на математический язык — это искусство математического моделирования.

Математическая модель

Наряду с философией математика является основой всех точных наук. Язык формул отличается от обыденного, расплывчатого языка точностью, хотя и он не является логически строгим, ибо содержит нечёткость определений и понятий, нечёткость принадлежности к данному множеству (софизм «кучи»). Основоположник теории нечёткости, эквивалентной теории случайных множеств Л. А. Заде ввёл в употребление понятия пушистых множеств и нечётких алгоритмов. Определение любого неизученного до конца явления, будь то отрыв или турбулентность, нечётко. Определение гидродинамики и даже математики тоже нечётко. Вот примеры и парадоксальных, и прямо противоположных определений математики.

√ «Математика — царица наук» (Г. Ф. Гаусс).

√ «Математика — это язык» (Д. У. Гиббс).

√ «Математика — служанка наук» (И. М. Яглом).

√ «Математика — это приближённое описание природы» (М. Клейн).

√ «Каждая наука есть прикладная математика» (Дж. Кемерни).

√ «Математика есть наука, в которой отсутствует гипотеза» (Д.Гильберт).

√ «Математика — искусство называть разные вещи одним и тем же именем» (А. Пуанкаре).

√ «Математика может быть определена как доктрина, в которой мы никогда не знаем, ни о чём говорим, ни того, верно ли то, что мы говорим» (Б. Рассел).

√ «Математика — образец любого способа познания мира» (Т. Гоббс).

√ «В каждой науке столько собственно науки, сколько в ней математики» (И. Кант).

√ «Математическое суждение никогда не бывает верным, оно может быть только ошибочным» (К. Поппер).

√ «Математика содержит в себе черты волевой деятельности, умозрительного рассуждения и стремления к эстетическому совершенству. Её основные и взаимно противоположные элементы — логика и интуиция, анализ и конструкция, общность и конкретность» (Р. Курант и Г. Роббинс).

√ «Математика — экспериментальная наука, часть теоретической физики и член семейства естественных наук» (В. И. Арнольд).

√ «Математика... может послужить моделью для решения основной проблемы нашей эпохи: обрести высшую религиозную цель и смысл культурной деятельности человечества» (И. Р. Шафаревич).

√ «Математика — это не просто собрание формул и теорем; кроме них она содержит идеи» (Д. Рюэль).

С каждым из этих определений можно поспорить. В настоящей главе мы примем, что математика — это наука, позволяющая строить модели природных и неприродных явлений. Математической моделью физического объекта Н. Бурбаки (1972) считает математическую структуру — некое множество (никак не определяемых!) объектов с заданной системой отношений между ними. Подобно теории относительности теория математического моделирования, являющаяся остриём философских проблем гидродинамики, разделилась на общую и специальную. В рамках общей теории строятся реологические (неньютоновы) модели жидкости. Специальная теория рассматривает сплошную ньютонову среду.

Гидродинамическая задача подразделяется на глобальную и локальную. В рамках глобальной модели изучается течение в целом. В силу сложности современных математических моделей глобальная задача решается с помощью численных методов. В рамках локальной теории изучаются решения на складках — многообразиях меньшей размерности, чем глобальная область решения: поверхностях, линиях или точках. То есть там, где нарушается требуемая гладкость решения.

Большое значение приобретает проблема сопряжения глобальной и локальной задач. Строгий подход к этой проблеме подразумевает *сращивание* численного решения с асимптотическим решением, для чего требуется знание внешнего предела локальной задачи, описывающей структуру складки. Эмпирический подход подразумевает *склеивание* результатов решения обеих задач. Наконец, в некоторых случаях возможно построение *сквозного численного алгоритма*, который настолько приспособлен к задаче, что «не замечает» наличия в расчётном поле складки течения.

Открытой остаётся проблема разрешимости уравнения Навье–Стокса, то есть доказательство существования единственности и регулярности решений этого уравнения. Эту тему впервые затронули Лере и Шаудер, применившие к анализу уравнения Навье–Стокса методы функционального анализа (Темам, 1981). Ладыженская (1975) исследова-

ла разрешимость краевых задач с помощью обобщённых решений. Имеет ли уравнение Навье – Стокса гладкое единственное решение в диапазоне времени от 0 до ∞? В случае 2D имеет, а в случае 3D такое решение существует только в ограниченном интервале времени. К сожалению, эта проблема оказалась слишком сложной и поэтому далёкой от своего завершения (Фриш, 1998), а именно она позволила бы обосновать идею о хаотическом странном аттракторе в теории турбулентности (Рюэль, 2001).

Исследуется также корректность упрощённых уравнений Навье – Стокса, в особенности уравнений пограничного слоя (Олейник и Самохин, 1997).

Иерархия моделей

Одним из источников появления новых постановок физических задач является совершенствование известных математических моделей. Так, уравнение движения математического маятника, представляющего собой материальную точку на конце невесомой нити, $d^2x(t)/dt^2 + x(t) = 0$, где x — угол отклонения нити от вертикали, можно «улучшить» различными способами. Несущественно расширяет область применимоczти математической модели по значениям $x(0)$ учёт нелинейного члена: $d^2x/dt^2 + x - x^3/6 = 0$. Гораздо принципиальнее, написав: $d^2x/dt^2 + \sin x = 0$, сразу же расширить область применимости на весь диапазон значений $x(0)$.

Математическая модель — это упрощение реальной ситуации. Её пригодность зависит от поставленных целей. Так, период колебаний маятника можно найти из любого вышеприведенного уравнения. Однако для определения числа колебаний, совершенных до полной остановки маятника, эти уравнения непригодны, и следует вспомнить о трении. В линейном приближении получим: $d^2x/dt^2 + k\,dx/dt + x = 0$. Можно пойти ещё дальше? Можно, если учесть нелинейность. Трение качения и скольжения в шарнире пропорционально нагрузке, то есть квадрату скорости $(dx/dt)^2$. Когда велики значения $|dx/dt|$, точнее говоря числа Рейнольдса, аэродинамическая сила сопротивления становится значительной, зависимой от скорости. Можно принять величину коэффициента k зависящей от скорости.

Разумеется, и такая модель не является истинной в конечной инстанции. Маятник движется не в спокойной, а в им же возмущённой среде — в вихревом следе. Поэтому более точная модель должна учи-

тывать память — зависимость от предыстории процесса. Таков переход от простого осциллятора к нерешённым проблемам гидродинамики. Конкретная математическая модель усложняется, когда вводится в описание новый эффект, не учитываемый на предыдущей стадии моделирования.

Можно попытаться учесть растяжение нити, пропорциональное квадрату скорости, её вес и тому подобные факторы, если вовремя не вспомнить известный афоризм о том, что «всякое уравнение длиной более пяти сантиметров неверно».

Как уже отмечалось, уравнение Навье–Стокса формально переходит в уравнение Эйлера, когда $\mathrm{Re} \gg 1$, и в уравнение Стокса в другом предельном случае, когда $\mathrm{Re} \ll 1$. Все эти уравнения являются базовыми для гидродинамики так же, как волновое уравнение, уравнение теплопроводности и уравнение Лапласа являются базовыми для математической физики.

Реальная ситуация не так проста, так как имеется большой набор асимптотических субмоделей гидродинамических явлений: дифференциальных, интегральных и интегродифференциальных уравнений. На рис. 3.2 показаны лишь некоторые из них: Pr — уравнения пограничного слоя Прандтля, NS — уравнения Навье–Стокса, $\overline{NS}$ — усредненные уравнения Навье–Стокса, NS^* — укороченные (параболизованные, гиперболизованные и т. д.) уравнения Навье–Стокса, AT — уравнения асимптотической теории (линеаризованные уравнения Навье–Стокса, свободного взаимодействия, уравнения маргинального отрыва и т. д.), Eu — уравнение Эйлера, St — уравнение Стокса, L — уравнение Лапласа, L^* — уравнение Лапласа с разрывами, CD — уравнения контурной динамики (эволюции контактного разрыва, вихревой пелены, свободной границы).

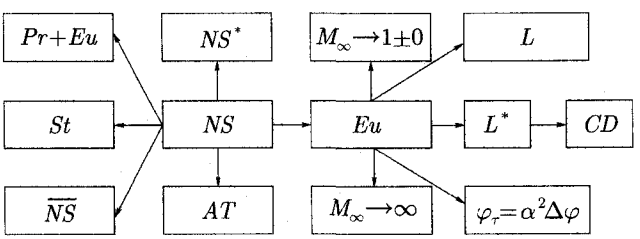


Рис. 3.2. Основные уравнения гидродинамики

3.2. Теория вихрей

Гидродинамика — наука о вихрях, безвихревое течение тривиально. Д. Кюхеман (1965) называл вихри жилами и мышцами гидродинамики. Чтобы не отождествлять теорию вихрей со всей гидродинамикой, под этим названием традиционно подразумевают теорию течения идеальной жидкости (Сэффмен, 2000; Грин, 1995; Тинг и Клейн, 1991). Теория вихрей — это парадигма Эйлера, она не работает, когда существенна диффузия. Кроме того, теория вихрей не отвечает на вопрос, как образовались вихревые структуры. Поэтому модель идеальной жидкости справедлива либо в некоторой ограниченной подобласти течения, либо в том случае, когда задействованы факторы (инерциальность, нестационарность, сжимаемость и т. д.), превалирующие над проявлением вязкости.

Теория вихрей разрабатывалась такими выдающимися учёными, как Л. Эйлер, Д. Бернулли, Г. Гельмгольц, У. Кельвин, Г. Р. Кирхгоф, Л. Прандтль. Основополагающей считается известная работа Гельмгольца (1858). Одна из первых попыток объединить результаты принадлежит А. Пуанкаре (2000). С 1885 года он читал в Сорбонне лекции по различным вопросам математической физики. Среди них особенно сложным оказался курс лекций по теории вихрей, так как к тому времени эта наука ещё не сформировалась. Изданные в 2000 году эти лекции имеют лишь историческое значение. Интересно, что лекцию, посвящённую идее Гельмгольца об образовании туманов, Пуанкаре не включил в свою книгу. «Я не пришёл к заключениям, — объяснил он, — которые меня бы удовлетворили».

Вихри существуют в трёх видах: объёмные, поверхностные и нитевые. У объёмного вихря, понимаемого как ротор скорости $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$, все три размера одинаковы по порядку величины. У поверхностного вихря, представляющего собой размазанную по поверхности бесконечную завихренность, один из размеров (толщина) мал. У вихревой нити бесконечная завихренность стянута в линию, два размера (толщина и ширина) малы.

Согласно теореме Гельмгольца о сохраняемости циркуляции вихревой трубки вихревые линии не обрываются. Они либо замыкаются на себя, либо — на тело, либо уходят на бесконечность. Различие между источником и вихрем в математической физике принципиальное, так как интенсивность источника определяется скалярной величиной — расходом, а интенсивность завихренности определяется векторной величиной — ротором скорости.

При известных ограничениях формула Био – Савара определяет скорость в безграничном пространстве по заданному полю завихренности в виде интеграла по объёму τ:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi}\int\frac{(\boldsymbol{r}^0-\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{\omega}^0}{|\boldsymbol{r}^0-\boldsymbol{r}|^3}d\tau. \tag{3.1}$$

Верхний индекс отмечает принадлежность к области интегрирования.

Различные типы вихрей могут составлять одну структуру. Такой вихрь называется комбинированным. Всякий ограниченный по протяжённости объёмный вихрь имеет границу с потенциальным потоком. Граница может быть *слабым разрывом*, на котором рвутся производные скорости, или *сильным разрывом*, на котором рвётся сама скорость. В последнем случае разрыв является поверхностным вихрем, а вся структура — комбинированным вихрем.

Объёмные вихри

Рассмотрим слабые и сильные разрывы на простом примере осесимметричного цилиндрического вихря радиуса r_0 с постоянной завихренностью ω. Индуцируемая круговым вихрем (рис. 3.3 *а*) окружная скорость равна $u=\omega r$, если $r\leqslant r_0$, и $u=\Gamma/(2\pi)$, если $r>r_0$, где Γ — полная циркуляция вихря. Граница вихря является слабым разрывом при $\Gamma=2\pi\omega r_0$ и сильным разрывом при любом другом значении Γ. В случае сильного разрыва вихрь всегда является комбинированным, так как он состоит из объемного вихря и контактного разрыва. Давление, равное

$$p=\frac{p_1-(u^2+v^2)/2-\omega\psi}{p_2-(u^2+v^2)},$$

непрерывно на границе вихря $\psi=0$, где ψ — функция тока.

Завихренность кольцевого вихря (рис. 3.3 *б*) сосредоточена в кольце $r_1\leqslant r\leqslant r_2$. Границей полого вихря $r=r_1$ всегда является тангенциальный разрыв скорости. Если внутри него поместить точечный вихрь, то разрыв можно сделать слабым.

В *задаче о склейке* плоского вихря с однородным потенциальным потоком вихрь тоже может иметь в качестве границы слабый (рис. 3.4 *а*) или сильный (рис. 3.4 *б*) разрыв. В этой задаче вихрь имеет дипольную структуру: завихренность при $y>0$ отрицательна, завихренность при $y<0$ положительна.

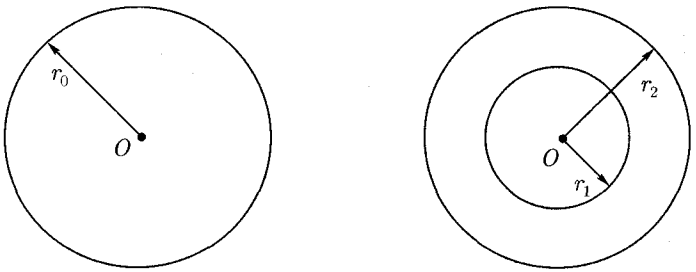


Рис. 3.3. Круговой (*а*) и кольцевой (*б*) вихри

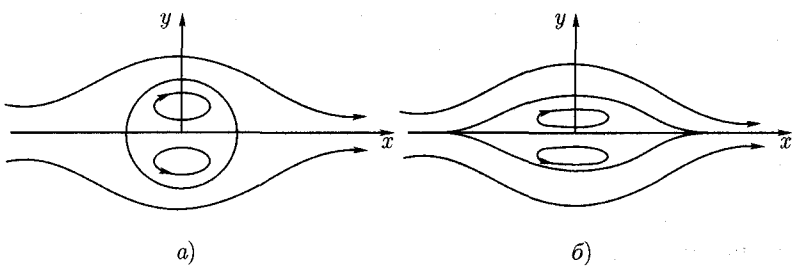
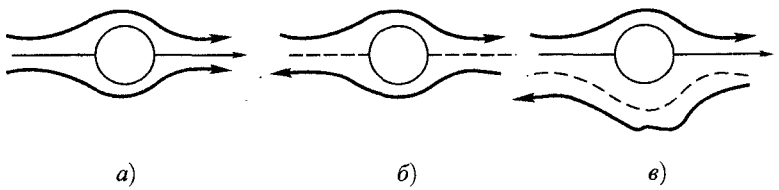


Рис. 3.4. Задача о склейке: *а* — слабый разрыв; *б* — сильный разрыв

Примером стационарно вращающегося плоского вихря является эллиптический вихрь Кирхгофа. Если устремить малую ось эллипса к нулю, то получится поверхностный вихрь в виде вращающегося вокруг центра конечного отрезка прямой, концы которого не свёрнуты в спираль. Необычное зрелище! Обнаружены различные обобщения вихря Кирхгофа в виде одинарных и двойных образований, называемых «заплатами Бюрбо» (Сэффмен, 2000).

Пространственный аналог задачи о склейке с помощью слабого разрыва представляет сферический вихрь Хилла — точное решение уравнений Эйлера. Ещё два примера осесимметричных вихрей: тороидальный вихрь и комбинированный вихрь Ренкина.

В стационарном течении идеальной жидкости действует принцип отвердевания линий тока: любую линию тока можно принять за твёрдую



а) *б)* *в)*

Рис. 3.5. Обтекание окружности: *а* — безотрывное; *б* — с линией разрыва, совпадающей с осью симметрии; *в* — с произвольной линией разрыва

границу или за тангенциальный разрыв скорости. Экзотический пример на эту тему представлен на рис. 3.5: в схеме безотрывного обтекания окружности (рис. 3.5 *а*) за твёрдую границу приняты линия симметрии (рис. 3.5 *б*) и две параллельные линии тока (рис. 3.5 *в*). Линия тангенциального разрыва обозначена штрихами.

При установлении стационарного течения в замкнутых зонах образуется некоторое распределение завихренности, определяемое теоремой Бэтчелора. В замкнутой форме решение получено для плоского течения ($\omega = \text{const}$) и для осесимметричного ($\omega/r = \text{const}$, где r — расстояние от оси). Интересно отметить, что вихрь Хилла удовлетворяет условию теоремы Бэтчелора.

Слияние вихрей в идеальной несжимаемой жидкости является одним из удивительных свойств вихревых кластеров. Имеется численный расчёт (Сэффмен, 2000) эволюции на плоскости двух круговых вихрей одинакового знака с радиусом r_0. Когда начальное расстояние между вихрями λ достаточно велико по сравнению с r_0, вихри, вытянувшись в овалы, вращаются раздельно, подобно точечным вихрям — такая аналогия справедлива при $\lambda \gg r_0$ — вокруг геометрического центра. Когда начальное расстояние между вихрями мало, они сливаются в единый клубок за конечное время. Наконец, в критическом случае ($\lambda \approx 3.2 r_0$) вихри совершают периодическое движение, то сливаясь, то расходясь.

Таким образом, в процессе эволюции связность безвихревой области может изменяться. Переход к хаосу заведомо возможен, если связность безвихревой области больше 4.

Тангенциальные разрывы

Поверхностный вихрь является поверхностью разрыва тангенциальной составляющей скорости — поверхностью скольжения. Имеется

три типа поверхностей скольжения: вихревая пелена, свободная граница и контактный разрыв (рис. 3.6). *Вихревая пелена* разделяет одну и ту же жидкость, давление на ней непрерывно (частный случай контактного разрыва). *Свободная поверхность* отделяет область течения от области, на границе которой давление считается заданным, в общем случае как функция поверхностных координат и времени; в частном случае свободная поверхность ограничивает изобарическую область. На свободной поверхности могут действовать поверхностные силы. *Контактный разрыв* отделяет различные жидкости; на нём также могут действовать силы поверхностного натяжения. Все типы поверхностей скольжения сохраняют своё определение и в случае сжимаемой среды; плотность газа на поверхности скольжения разрывна.

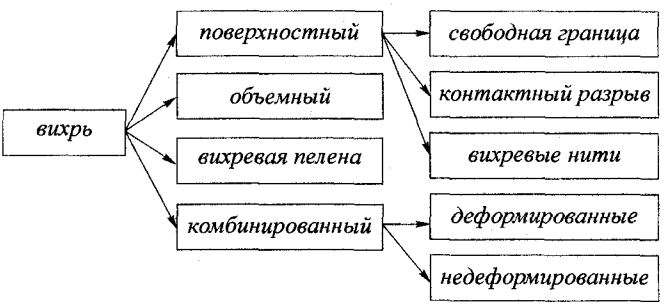


Рис. 3.6. Типы вихрей

Для вихревой пелены, заданной в виде $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}(\xi, \Gamma, t)$, где Γ — отсчитываемая от некоторого центра циркуляция, ξ — координата вдоль вихревой линии $\Gamma = \text{const}$, уравнение (3.1) сводится к интегралу по площади s вихревой пелены:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\boldsymbol{R}^0 - \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{\gamma}^0}{|\boldsymbol{R}^0 - \boldsymbol{r}|} ds^0, \tag{3.2}$$

где $\boldsymbol{\gamma} = \lim\limits_{\eta \to 0} (\boldsymbol{\omega}\eta)$ — разрыв скорости, η — толщина вихревого слоя.

С какой скоростью перемещается вихревая линия $\Gamma = \text{const}$? Из условия непрерывности давления на вихревой пелене и уравнения Бернулли находим:

$$\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^-}{2} \nabla(\Delta\varphi) = 0,$$

где $\Delta\varphi = \varphi^+ - \varphi^- = \Gamma$ — разность потенциалов на вихревой пелене. Таким образом, вихревая линия перемещается со скоростью $(\boldsymbol{u}^+ + \boldsymbol{u}^-)/2$.

Согласно формуле Сохоцкого главное значение особого интеграла (3.2) для точки, расположенной на вихревой пелене, тоже равно полусумме скоростей с разных её сторон. Поэтому уравнение эволюции таково:

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}(\xi,\Gamma,t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{(\boldsymbol{R}^0 - \boldsymbol{R})\times\boldsymbol{\gamma}^0}{|\boldsymbol{R}^0 - \boldsymbol{R}|^3} ds. \tag{3.3}$$

Форма плоской вихревой пелены представима в виде $z = z(\Gamma,t)$, где $z = x + iy$ — комплексная координата. Из (3.3) получаем:

$$\frac{\partial \overline{z(\Gamma,t)}}{\partial t} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{d\Gamma^0}{z(\Gamma^0,t) - z(\Gamma,t)}.$$

Здесь особый интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, черта означает комплексное сопряжение. Наличие обтекаемого тела особенно просто учитывается, когда с помощью конформного преобразования $\zeta = \zeta(z,t)$ область течения отображается на каноническую область (полуплоскость или окружность). В этом более общем случае вводятся сопряжённые вихревые пелены, и уравнение эволюции приобретает следующий вид:

$$a\frac{\partial \overline{\zeta_k(\Gamma,t)}}{\partial t} = b(\zeta_k,t) + \frac{1}{2\pi i}\sum_n \int \frac{d\Gamma^0}{\zeta_n(\Gamma^0,t) - \xi_k(\Gamma,t)}, \tag{3.4}$$

где $a = |\partial z/\partial\zeta|^2$ — квадрат модуля растяжения координат, b — комплексная скорость течения при отсутствии вихревых пелен.

Уравнение (3.4) называется уравнением Биркгофа – Ротта. Исследованием уравнений (3.3) и (3.4) математики ещё не занимались.

Поверхностный вихрь — это всего лишь математическая идеализация. В реальных условиях поверхностный вихрь имеет внутреннюю структуру. Вместо разрыва (рис. 3.7 *а*) имеется вихревой слой (рис. 3.7 *б*) толщины δ. В невязкой жидкости δ — это реальная толщина вихревого слоя. В вязкой жидкости диффузия завихренности простирается до бесконечности, поэтому δ — это условная толщина пограничного слоя или слоя смешения.

Задача о распаде произвольного разрыва в несжимаемой жидкости некорректна. В реальном случае проявляется сжимаемость — перепад давления на разрыве приводит к гидравлическому удару. Ударная

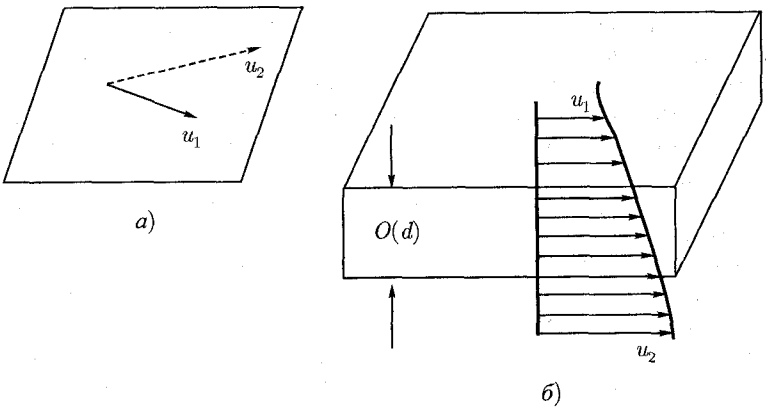


Рис. 3.7. Вихревой слой: *а* — нулевой толщины, *б* — конечной толщины

волна в приближении слабой сжимаемости среды (скорость звука стремится к бесконечности) мгновенно уходит на бесконечное расстояние от начального разрыва, и тогда задача о распаде сводится к *задаче об эволюции* поверхности скольжения.

Из всех типов вихрей в несжимаемой невязкой жидкости при отсутствии внешней силы (или ее потенциальности) может возникнуть только тангенциальный разрыв. Если есть сколь угодно малое влияние вязкости, то этот разрыв возникает как слой смешения, то есть как объемный вихрь.

Точечные вихри

Когда вихревые нити остаются параллельными друг другу, возможна постановка плоской задачи об эволюции точечных вихрей. Основы теории точечных вихрей заложил Г. Кирхгоф в своих знаменитых лекциях по уравнениям математической физики (1876). Современное состояние теории точечных вихрей изложено в книгах В. В. Козлова (1998) и А. В. Борисова, И. С. Мамаева, М. А. Соколовского (ред., 2003).

Два вихря ($N = 2$) не сближаются, так как расстояние между ними является инвариантом движения. Они могут навсегда покинуть систему, уйдя в бесконечность. Такое явление имитирует *выброс вихрей*.

Три вихря ($N = 3$) могут коллапсировать. Можно ли обратить течение, получив вместо коллапса разлет вихрей?

В гидродинамике причиной необратимости является трение. Уравнение Навье – Стокса, учитывающее трение, необратимо. Уравнение Эйлера обратимо, то есть допускает групповое преобразование $t \to -t$, $\boldsymbol{u} \to -\boldsymbol{u}$. Формально разлет возможен, что доказывает неединственность решения уравнения Эйлера. Отбор реального решения уравнения Эйлера должен производиться из условия, что жидкость имеет хотя бы исчезающе малую вязкость. В такой жидкости обратимость формально невозможна.

Точечные вихри — это математическая идеализация явления. На самом деле они имеют структуру, а следовательно, и характерный размер λ, который с необходимостью появляется в момент образования «точечного вихря» и увеличивается вследствие диффузии. Коллапс прекращается, когда вихри входят в окружность с радиусом $O(\lambda)$.

Совсем другая ситуация сопутствует разлету вихря, который начинается внутри окружности, где существенна диссипация и где поэтому *разлетное решение* невозможно. Говоря другими словами, в реальных условиях не бывает ни «настоящего» коллапса, ни «настоящего» разлета точечных вихрей, потому что не бывает «настоящих» точечных вихрей. Но даже «ненастоящий» коллапс существенно отличается от «ненастоящего» разлета. В первом случае вязкость срабатывает в конце процесса, во втором — в его начале.

В системе *четырех вихрей* ($N \geqslant 4$) имеет место неинтегрируемость и, как следствие этого, возможность перехода к хаосу. В присутствии твердых границ переход к хаосу наступает при меньшем числе вихрей, чем в безграничном пространстве.

Разумеется, индуктивное заключение о том, что каждому номеру N соответствует свой специфический эффект, несостоятельно. Однако следует ожидать, что сценарий перехода к хаосу при $N = 5$ будет отличен в деталях от сценария перехода к хаосу при $N = 4$.

Конфигурация из N точечных вихрей одинаковой циркуляции будет равномерно вращаться вокруг центра, если они расположены в вершинах правильного многоугольника. Такие конфигурации, называемые *томсоновскими*, устойчивы[1], если $N \leqslant 7$.

[1]За исследование таких конфигураций английский гидродинамик Дж. Томпсон получил в 1883 году премию Адамса. Под впечатлением его изящной теории другой англичанин У. Кельвин (до получения звания лорда он тоже был Томсоном) предложил теорию вихревых атомов (см. Лагт, 1983). Однако после создания квантовой механики выяснилось, что эта теория является лишь историческим курьезом, механистические аналогии к атомной физики неприменимы. Для придания устойчивости в центр томсоновской структуры можно поместить точечный вихрь.

Бетяев, Гайфуллин и Гордеев (1994) численно исследовали эволюцию системы из n концентрических томсоновских вихрей. Коллапс такой системы возможен, если $n > 2$.

Так называемый Лос-Аламосский каталог содержит симметричные стационарные конфигурации точечных вихрей, вращающихся как твердое тело (Кэмпбел, Зифф, 1979).

Стационарная одинарная вихревая дорожка точечных вихрей, как и двойная дорожка, неустойчива (см. Кочин, Кибель, Розе, 1955). Моделирование вихревого следа за телом посредством двойной вихревой дорожки некорректно.

Исследовано взаимодействие точечных вихрей с твердыми границами: окружностью (Борисов, Мамаев, Соколовский [ред.], 2003), щелью в плоскости (Бетяев, 1987).

Система точечных вихрей гамильтонова, если их циркуляция одинакова. В общем случае теория точечных вихрей отличается от гамильтоновой динамики.

Онсагер (1949) предпринял попытку описать хаотическую эволюцию системы большого числа точечных вихрей в конечной по протяженности односвязной области с помощью методов статистической механики (см. также Сэффмен, 2000). Для такой системы Онсагер ввел понятие энтропии и температуры. Если температура положительна, то вихри интенсивно перемешиваются. Если температура отрицательна, то появляется тенденция самоорганизации вихревых кластеров.

Деформируемые вихревые нити

Изогнутая вихревая нить имеет бесконечно большую составляющую скорости, направленную по бинормали (Бэтчелор, 1973). Поэтому для придания физического смысла такой математической идеализации, как вихревая нить, следует ввести ее толщину a. Кроме того, можно ввести внутреннюю структуру вихревой нити — достаточно произвольное распределение аксиальной и азимутальной компонент скорости.

Показано, что одиночная структурированная вихревая нить может быть неустойчивой (неустойчивость Кельвина).

При $\varepsilon = a/\lambda \ll 1$ (λ — характерный продольный масштаб) бинормальная составляющая скорости вихревой нити равна:

$$\boldsymbol{u}(s,t) \approx \frac{1}{4\pi}\Gamma \boldsymbol{k}\boldsymbol{b} \ln \varepsilon, \tag{3.5}$$

где $\boldsymbol{u}$ — скорость вихревой нити, Γ — циркуляция, k — кривизна, s — координата, направленная вдоль вихревой нити, $\boldsymbol{b}$ — единичный бинормальный вектор. Вклад в скорость дает только локальный сегмент, окружающий рассматриваемую точку. Ни остальные участки кривой, ни другие вихревые нити в главном приближении не оказывают влияния на движение нити. Поэтому теория эволюции, основанная на уравнении (3.5), называется *приближением локальной индукции*.

В соответствии с (3.5) без изменения формы ($k = \text{const}$) эволюционируют только вихревое кольцо и винтовая линия. При $\varepsilon \to 0$ скорость принимает конечное значение только у прямолинейной вихревой линии.

Хасимото (1972) изящно свел (3.5) к нелинейному уравнению Шрёдингера, решение которого, в свою очередь, сводится к решению системы линейных задач. Получено множество точных решений уравнения Шрёдингера, включающее солитоны.

Наличие двух разнопорядковых масштабов длины (a и λ) позволяет наряду с прочими методами использовать метод сращивания асимптотик (см. Сэффмен, 2000).

Следует отметить, что приближение локальной индукции справедливо только до того момента времени, когда вихревые линии сцепляются, то есть сближаются друг с другом на расстоянии $O(a)$.

3.3. Вычислительная гидродинамика

Вычислительная математика посвящена, в основном, решению задач механики сплошных сред. Поэтому термины «вычислительная гидродинамика» и «вычислительная математика» можно считать синонимами.

Краткая история

Методы численного расчета дифференциальных уравнений в частных производных разрабатывались задолго до появления электронно-вычислительных машин.

В 1910 году в пятидесятистраничной статье Л. Ричардсон опубликовал итерационный метод решения эллиптических уравнений (см. Роуч, 1980). Он построил решение вблизи границ области, получил оценки погрешности, представил экстраполяцию расчетов при стремлении шага сетки к нулю, предложил сравнивать численные расчеты с точными решениями для областей простой формы, вычислил напряжения, возникающие в каменной дамбе. Вот как он писал об экономической эффективности своего «ручного счета»: «Пока что я платил за расчет одного

координатного узла лапласиана по расценке $n/18$ пенсов, где n — число цифр, с которыми проводятся вычисления. Основная ошибка вычислителей состояла в том, что они путали знаки «плюс» и «минус». Что касается скорости расчетов, то один из самых быстрых работников рассчитывал за неделю в среднем 2000 узлов лапласиана с трехзначными числами; ошибочные расчеты не оплачивались». Впоследствии выяснилось, что схема Ричардсона, безусловно, неустойчива.

Массо (1900) разработал метод характеристик для плоского течения, рассмотрел локальные задачи о расчете искомой функции в точке, находящейся вблизи разрыва, границы и вдали от них.

Следующим прорывом в вычислительной математике следует считать работу Куранта, Фридрихса и Леви (1928), посвященную вопросам сходимости разностной системы к дифференциальной, существования и единственности решений. Здесь было получено знаменитое необходимое условие устойчивости Куранта – Фридрихса – Леви.

Саусвелл в 1946 году разработал метод релаксации для решения эллиптических уравнений; Кранк и Никольсон в 1947 году предложили неявный метод для решения параболических уравнений. Лагранжевы методы, в которых прослеживается траектория «частицы», были разработаны в Лос-Аламосской лаборатории США и опубликованы Фроммом в 1961 году.

При расчете скачков уплотнения появлялись неустойчивости. Для их устранения фон Нейман и Рихтмайер в 1951 году предложили метод «размазывания» разрыва с помощью «искусственной вязкости». В широко известном методе частиц в ячейках, разработанном тоже в Лос-Аламосе Эвансом, Харлоу и др. в 1957 году, размазывание скачка достигается за счет дискретизации континуума. Размазывание скачка используется также в методе Лакса, Лакса – Вендроффа и др. Предложенный в 1969 году МакКормаком вариант метода Лакса – Вендроффа и сейчас является одним из наиболее популярных.

Применяются методы, не размазывающие, а наоборот, выделяющие скачки уплотнения. В методе Годунова (1959) каждый разрыв, рассекающий ячейку с кусочно-постоянными параметрами, рассматривается как локальное решение задачи Римана о распаде произвольного разрыва[1].

Эффективно применение метода Бубнова – Галёркина (см. Флетчер, 1988). С его помощью удается создать и методы конечных элементов, и методы конечных разностей, и спектральные методы.

[1]По методу Годунова проводятся международные конференции. О занимательной истории создания метода см.: Годунов С. К. *Воспоминания о разностных схемах*. Новосибирск: Научная книга, 1997.

Метод Монте-Карло[1] разработан в той же Лос-Аламосской лаборатории Дж. фон Нейманом, Э. Ферми и др. Официальной датой рождения этого метода считается 1949 год, когда вышла статья Н. Метрополиса и С. Н. Улама.

В «докомпьютерное время» с помощью «ручного счета» решали задачи об эволюции вихревых пелен. Каден (1931) рассмотрел эволюцию спиральной вихревой пелены, Розенхед (1931) — устойчивость прямолинейной вихревой пелены, Вестуотер (1936) — эволюцию вихревой пелены в ближнем следе за эллиптически нагруженным крылом.

История создания ЭВМ началась фактически в 1883 году, когда великий Т. Эдисон пустил ток по платиновому электроду, помещенному в вакуумный баллон. Эта лампа накаливания стала первой в мире электронной лампой. Описание ЭВМ дал А. Тьюринг в 1936 году. Первая серийная ЭВМ UNIVAC была разработана в 1947 году Эккертом и Маучли. Она содержала 500 электронных ламп и имела частоту в 2.25 МГц. Первый персональный компьютер разработал французский инженер Троунг Ти в 1973 году. Разработка оказалась настолько актуальной, что всего лишь через четыре года началось массовое производство персональных компьютеров.

В 1943 году математики Мак-Коллок и Питтс высказали идею нейросетевого вычислителя, принципиально отличную от идей Тьюринга и фон Неймана. Первый нейрокомпьютер (персептрон) построил в 1960 году Ф. Розенблатт. В 1986 году Д. Румельхарт предложил метод обучения нейрокомпьютера. Так началась продолжающаяся до наших дней нейрокомпьютерная революция.

В настоящее время появилось целое сословие инженеров-вычислителей. Арнольд (1997б) считает, что у них гипертрофировано левое полушарие за счет недоразвитого правого, их доминирование привело к засилию догматических методов, на которые научное сообщество реагирует крайне отрицательно.

Пренебрежительное отношение к вычислителям выработалось давно, еще в прошлом веке. Тогда не было компьютеров, однако были вычислители[2]. Вот как об этом пишет выдающийся государственный деятель России, обладавший незаурядными математическими способнос-

[1]Название «Монте-Карло» произошло от города Монте-Карло в княжестве Монако, известного своими казино, где рулетка является простейшим генератором случайных чисел.

[2]Тогда *клавишников* называли *исчислителями*, а сегодня (в порядке убывания квалификации) — *хакерами, юзерами, чайниками, ламерами.*

тями С. Ю. Витте[1] в своих мемуарах (*Из архива С. Ю. Витте. Воспоминания*. СПб.: Дмитрий Булганин, 2003. Т. 1–2): «Между математиками есть двоякого рода люди. 1) Математики-философы, т. е. математики высшей математической мысли, для которых цифры и исчисления есть ремесло; для этого рода математиков цифры и исчисления не имеют никакого значения; их увлекают не цифры и исчисления, а сами математические идеи. Одним словом, это — математики, если можно так выразиться, чисто философской математики. 2) Напротив, есть такие математики, которых философия математики, математические идеи не трогают, которые всю суть математики видят в исчислениях, цифрах и формулах... Математики, так сказать, чистые математики, философы-математики, к которым принадлежу и я, относятся всегда с презрением к математикам-исчислителям, а математики-исчислители, среди которых есть много ученых, весьма знаменитых, смотрят на математиков-философов как на людей в известной степени "тронутых".»

Тем не менее, как уже отмечалось, современные «исчислители» решили ряд задач хаотической динамики (Глейк, 2001). Численное решение возможно, если удается бесконечный перебор вариантов свести к конечному. Именно так была решена известная *задача о четырех красках*.

Проблемы

Появление ЭВМ стимулировало разработку новых методов вычислительной математики.

Задачи вычислительной математики делятся на корректные, условно-корректные и некорректные (рис. 3.8). Решение корректных задач не упирается в принципиальные трудности (Роуч, 1980; Андерсон и др., 1990; Оран, Борис, 1990; Флетчер, 1991). В этой связи следует выделить *задачу о склейке* численного решения с аналитическим (или численным) и *задачу о сращивании* численного решения с аналитическим (или численным).

Как уже отмечалось, контроль корректности математической модели в окрестности складок[2], где «сконцентрирована» нелинейность, особенно важен. Корректная математическая модель должна допускать локальные

[1]Кроме Витте в России XX века было еще два гениальных реформатора: П. А. Столыпин и А. Н. Косыгин. К сожалению, их отстранили от проведения реформ.

[2]Следует отличать гидродинамическую складку от геометрической (см. Томпсон, 1985).

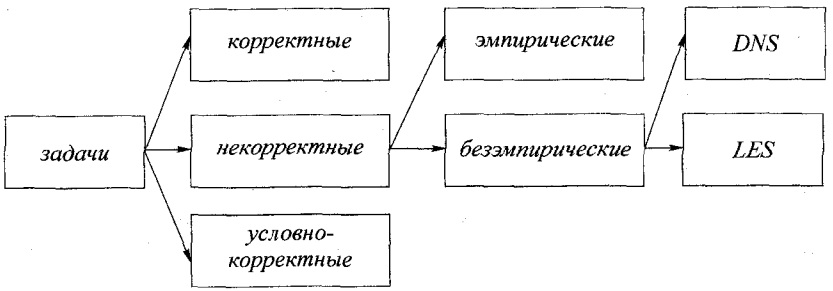


Рис. 3.8. Классификация задач и численных методов

асимптотические разложения в окрестности всех складок. Пока природа особенности на складке *явно не учитывается в численном расчете*, сходимость будет медленной, а результаты — незаслуживающими доверия.

При предельных значениях определяющих параметров течение расслаивается на асимптотические слои, примеры которых обсуждаются ниже. В такой ситуации естественно применение зональных численных методов, учитывающих диссипацию лишь в вязких слоях, а вне их — сводящихся к решению уравнения Эйлера. Решения в разных слоях должны сращиваться друг с другом.

Кроме разбиения задачи на продольные слои возможно ее разбиение на поперечные зоны. Такая потребность возникает при расчете течения в протяженной зоне, когда вдоль ее длины наблюдается смена различных режимов. Знакомые примеры: ламинарно-турбулентный переход, вихревой след за ракетой или самолетом.

Условная корректность обычно имеет место при решении *обратных задач*. Примеры: определение формы обтекаемого тела либо по заданному на нем распределению давления, либо по форме образованной перед ним ударной волны. Примером условно-корректной задачи является также *прямая задача* об эволюции тангенциального разрыва при отсутствии стабилизирующих факторов. Некорректность этой задачи связана с *неустойчивостью поверхности разрыва скорости* (Сэффмен, 2000). Необходимым условием корректности является требование аналитичности поверхности разрыва. Условно-корректное, то есть кусочно-аналитическое, решение получается с помощью специальных методов регуляризации (см. Бетяев, 1995).

При решении задач с поверхностными вихрями широкое применение нашли методы контурной динамики, основанные на применении гранич-

ных интегральных уравнений (см. Пуллин, 1992). Сведение трёхмерной задачи к граничному уравнению понижает её размерность на единицу, уравнения становятся двумерными, что позволяет при заданной мощности вычислительных средств решать более сложные задачи, чем те, которые непосредственно решаются разностными методами, методом конечных элементов и т. д. Метод граничных интегральных уравнений как вариант классического метода потенциала нашел широкое применение при решении стационарных задач механики сплошных сред. Нестационарные уравнения не удаётся свести к интегральному, ибо они содержат производную по времени. Однако остаётся шанс получить интегродифференциальное уравнение. Оно выведено в случае эволюции тангенциального разрыва в потенциальном потоке несжимаемой жидкости.

Численный расчет условно-корректной, как и просто корректной, задачи не представляет принципиальных трудностей, сопутствующих решению существенно некорректной задачи, примером которой является расчет турбулентного течения[1].

Как сказал С. Хокинг: «Укрощение случая и эрозия (жесткого) детерминизма представляют одно из наиболее революционных изменений в истории человеческой мысли». Классическая гидродинамика основана на детерминизме, а неклассическая — на вероятностных методах. В первом случае мы знаем траекторию любой частицы, а во втором случае наше знание неполно — траекторию отдельной частицы мы не знаем. Представление о средних значениях функций здесь заменяется представлением об их вероятностных распределениях.

Эмпирические методы расчета турбулентных течений — это методы «черного ящика», основанные на решении осредненных уравнений Навье – Стокса (RANS — Reynolds averaged Navier – Stokes). RANS требует мало вычислительных ресурсов. Однако используемые для замыкания уравнений феноменологические модели турбулентности не являются универсальными, поэтому не могут применяться для решения широкого круга прикладных задач. В настоящее время методы RANS уступили место *безэмпирическим методам* расчета.

Турбулентность при больших числах Re содержит две шкалы длин: одна ассоциируется с кинетической энергией, другая — с напряжениями Рейнольдса. Метод DNS позволяет решать задачу в первом масштабе. При достаточно мелкой сетке результаты расчетов по этому методу

[1]Разделение задач на корректные, условно-корректные и безусловно-некорректные не оставляет места для такого расплывчатого понятия, как «численный эксперимент». Обычно этим заимствованным из популярной литературы термином прикрывают свое недоверие к результатам численного расчета.

неразличимы с результатами экспериментов (Муан, Мехеш, 1998). DNS применяется для исследования простых течений при малых и умеренных числах Re. Прогнозируется, что к 2020 году коммерческие вычислительные машины достигнут мощности 10^{15} флопсов (floating-point operation per second), а в 2050 году с помощью DNS будут решаться все важные для практики гидродинамические задачи[1] (Бэтчелор, 2000).

К счастью, в настоящее время имеется другая стратегия — LES (large eddy simulation — расчет крупных вихрей). В рамках LES крупномасштабное течение рассчитывается численно, а для расчета течения в масштабе диссипации используется *подсеточная модель*. Одну из наиболее популярных аппроксимаций тензора подсеточных напряжений предложил Смагоринский в 1963 году. Хотя на сегодняшний день опробировано значительное количество подсеточных моделей и фильтров, еще не выбран их оптимальный вариант.

Перспективно использование так называемых *генетических алгоритмов* — компьютерных программ, в которых тонкие детали (локальные решения на складках) рассчитываются самим компьютером.

Как уже говорилось, численные методы должны удовлетворять *принципу соответствия* Бора, согласно которому с помощью нового численного метода (схемы) должны получаться решения всех известных задач, конгениальных рассматриваемой. Этот принцип — один из тестов на истину. Численный метод должен быть воспроизводимым, способным объяснять известные факты и предсказывать новые.

3.4. Парадоксы

Парадоксом называют неожиданное суждение, резко противоречащее общепринятому. Парадоксы присущи науке на всех стадиях ее развития. Они фиксируют конфликт между разными воззрениями, противоречие двух догм, однако интригуют не просто фиксацией противоречия, а скорее новизной абсурда. Историю развития науки и техники можно трактовать как историю возникновения и разрешения парадоксов[2]. Парадокс или антиномия — это не абсурд, а своеобразное совмещение противоречащих друг другу истин, естественная форма развития науч-

[1] Если такой прогноз сбудется, то аэродинамические трубы превратятся в музейные экспонаты.

[2] А. Эйнштейн смотрел на историю как на драму идей. С другой стороны, великий английский историк Дж. Тойнби считал, что история развивается по схеме «Вызов – Ответ». А с третьей стороны, история — это борьба добра со злом.

ного знания. В отличие от софизма, представляющего собой интеллектуальное мошенничество или умышленный обман[1], антиномия содержит неразрешимую к настоящему времени проблему. Пока не принята парадигма, приходится сталкиваться с парадоксальными по форме теориями. Полного списка антиномий не существует. Их много, так как любую нерешенную проблему можно рассматривать как парадокс. «Путь парадоксов, — говорил О. Уайльд, — это путь истины». Сформулировать парадокс — значит поставить задачу. А постановка задачи, как считается, — это наполовину ее решение.

3.4.1. Классификация

Логические парадоксы, известные со времен апорий (затруднений) Зенона Элейского («Ахиллес и черепаха», «Лжец», «Куча» и т. д.), учат нас контролю за построением дедуктивных схем (Ивин, 1997).

Биофизические парадоксы рассмотрены Блюменфельдом (2002).

Математические антиномии (Кантора, Рассела, Ришара, Бурали-Форти) расшатали основы теории множеств, способствуя развитию метаматематики.

Практическое значение парадоксов — двигателей прогресса — состоит в том, что они заставляют по-новому посмотреть на основы старой теории и построить другую, более совершенную теорию, а зачастую и новую науку. Специальная теория относительности — это разрешение парадокса о конечности скорости передачи информации, квантовая механика — это разрешение парадокса о прерывистости сигнала в микромире. Парадоксы породили физику элементарных частиц и современную космологию. Широко известны такие физические парадоксы, как дуализм волна–частица, парадокс Эйнштейна – Подольского – Розена, парадоксы путешествия во времени (Дойч, 2001).

«Обстоятельства, с которыми мы сталкиваемся, кажутся, на первый взгляд, совершенно парадоксальными с чисто математической точки зрения, и предусмотреть их можно только из физических соображений» (Ж. Адамар).

Самые фундаментальные антиномии, стоящие на развилке наук, формулируют и разрешают гении. Это подметил еще А. Пушкин:

О, сколько нам открытий чудных
Готовит просвещенья дух

[1]Непреднамеренная ошибка в логике называется паралогизмом. Пока ошибка не обнаружена, паралогизм может быть парадоксом.

И опыт, сын ошибок трудных,
И гений, парадоксов друг,
И случай, Бог-изобретатель.

В науке различают эмпирическое суждение, установленное с помощью эксперимента, и теоретическое суждение, основанное на математическом моделировании явления. Поэтому можно говорить о двух типах научных парадоксов.

Первый из них — это противоречие между вновь полученным спекулятивным суждением и общепринятым спекулятивным или эмпирическим суждением. Роль эмпирического суждения может играть и так называемый «здравый смысл». Такой тип парадокса возникает в результате улучшения математической модели явления или усовершенствования метода расчета. Так, гелиоцентрическая теория Коперника резко противоречила и геоцентрической теории Птолемея, и жизненному опыту.

Второй тип парадокса — это противоречие между вновь полученным опытным суждением и общепринятым фактом.

3.4.2. Антиномии первого рода

Сюда относятся парадоксы переупрощения математической модели. Так, безотрывное обтекание острой кромки пластины приводит к *парадоксу бесконечности*: скорость жидкости при подходе к кромке неограниченно возрастает. Разгадал этот парадокс, как уже говорилось, Г. Гельмгольц: реальное обтекание кромки пластины отрывное, от нее отходит линия разрыва касательной составляющей скорости.

Парадокс Эйлера – Д'Аламбера, с одной стороны, является парадоксом переупрощения математической модели, а с другой стороны — парадоксом симметрии.

Рассмотрим обтекание цилиндра. При малых значениях числа Re течение симметрично как по горизонтальной, так и по вертикальной осям. С увеличением числа Re нарушается симметрия между обтеканием передней и задней частей цилиндра, появляется след, нарушающий продольную симметрию. Наконец, при еще большем увеличении числа Re нарушается симметрия «верх—низ», обтекание становится нестационарным. Смена симметрий, их внезапное разрушение — фундаментальный закон гидродинамики. В реальных условиях абсолютная симметрия невозможна, в потоке всегда есть асимметрия. Когда течение неустойчиво, почти симметричные причины могут приводить к совсем несимметричным последствиям.

Известные парадоксы ползущего течения Стокса и Уайтхеда являются парадоксами корректности математической модели (Ван-Дайк, 1967). К этому же типу относятся парадоксы отсутствия решений, к примеру — отсутствие радиально расходящегося течения в угле при достаточно больших числах Re.

Движение тела по инерции

Рассмотрим еще один пример переупрощения математической модели — замедленное движение тела по инерции. Скорость $u_0(t)$ движения тела массы m под действием силы $f(t)$ определяется из уже не один раз упоминавшегося уравнения Ньютона:

$$m\frac{du_0(t)}{dt} = f(t). \tag{3.6}$$

Примем, что тело замедляет свое движение по инерции, скорость устремляется к нулю, сила f является силой сопротивления и тоже стремится к нулю. Из уравнения Бернулли заключаем, что давление пропорционально u_0^2. Тогда $f = O(u_0^2)$. Подставляя эту оценку в (3.6), получаем закон замедления движущегося по инерции тела: $u_0 = k/t$ при $t \to \infty$. Решение задачи зависит от безразмерного параметра k/l, где l — характерный размер тела. Задачу о движении пластинки с присоединенной к ней гладкой каверной (рис. 3.9 *а*) рассмотрел Карман (Гуревич, 1979; Биркгоф и Сарантонелло, 1964), Гилбарг получил семейство решений, когда каверна имеет заостренную вершину (рис. 3.9 *б*). По-видимому, бесконечная каверна при замедленном движении тела схлопывается. Остается неясным, существует ли решение со спиральными вихревыми пеленами (рис. 3.9 *в*).

В чем же суть парадокса? В том, что хотя скорость тела монотонно уменьшается обратно пропорционально времени, путь, проходимый телом, стремится к бесконечности по логарифмическому закону. Время торможения бесконечно. Разгадка парадокса заключается в том, что принятая математическая модель идеальной жидкости несправедлива на конечной стадии торможения. Здесь необходим учет трения.

Парадокс Бьеркнеса

Парадокс Бьеркнеса демонстрирует различие между действием гидродинамических и электромагнитных сил дальнодействия (Прандтль,

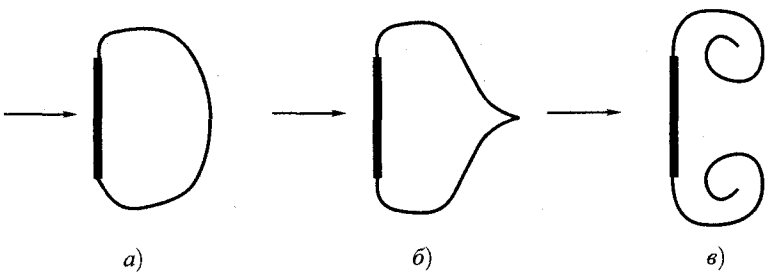


Рис. 3.9. Схемы псевдостационарного обтекания пластины: *а* — гладкая свободная граница; *б* — свободная граница с заостренной вершиной; *в* — спиральные вихревые пелены

1951). Он касается взаимодействия двух пульсирующих в несжимаемой жидкости тел (сфер). Если оба тела пульсируют в одинаковой фазе, то они притягиваются друг к другу. Если они пульсируют в противоположной фазе, то они отталкиваются. В электродинамике, наоборот, разноименные заряды и полюсы притягиваются, а одноименные — отталкиваются.

Парадокс Прандтля

Л. Прандтлю принадлежит разгадка парадоксального явления: скорость плывущей по реке баржи всегда больше скорости течения. Настолько больше, что ею можно управлять с помощью руля (Прандтль, 1951). Этот парадокс относится также к льдинам, айсбергам, бревнам и другим твердым предметам, плывущим по поверхности воды в открытом русле.

Эффект тандема

Почему бегун, а особенно велосипедист, стремятся пристроиться сзади соперника на небольшом расстоянии от него? Потому что там, в спутном следе, создается разрежение, снижающее аэродинамическое сопротивление. Этот факт общеизвестен и никакого удивления не вызывает. Но совершенно неправдоподобным кажется эффект, когда суммарный коэффициент сопротивления двух установленных друг за другом

тел оказывается меньше и даже существенно меньше, чем коэффициент сопротивления одного тела. Для цилиндров это отношение достигает 50%, а для дисков — 86% (Идельчик, 1982).

Как объяснить этот парадокс? В отрывной зоне за первым телом создается разрежение значительно большее, чем за вторым телом. Таким образом создается действующая на заднее тело разность давлений, направленная против потока. Заднее тело испытывает не силу сопротивления, а силу тяги, что и приводит к снижению суммарного коэффициента трения. Кроме того, оно повышает давление за первым телом, что уменьшает коэффициент сопротивления первого тела. Если взаимоположение тел не фиксировано, то они приблизятся друг к другу.

Парадокс Жуковского

В 1882 году Н. Е. Жуковский (см. Жуковский, 1949) установил парадокс, в соответствии с которым втекающая в сосуд струя жидкости не создает реакцию. Если сосуд, из которого жидкость истекает, подвесить на нитке как маятник[1], то, по закону сохранения количества движения, он отклонится в сторону, обратную направлению скорости струи (рис. 3.10*а*). Сосуд, в который втекает жидкость, не отклонится (рис. 3.10*б*).

В случае вытекающей жидкости в плоскости Треффтца ($x = \infty$) имеется струя, которая и вызывает отклонение сосуда. В случае втекающей струи в плоскостях Треффтца ($x = \pm\infty$) жидкость покоится, поэтому силы реакции нет; уменьшение давления на внешней поверхности CD в точности компенсируется приращением давления на внутренней поверхности AB вследствие удара втекающей струи (E — точка торможения потока).

3.4.3. Антиномии второго рода

Уже на склоне лет выдающийся французский инженер-строитель А. Эйфель (1832–1923), заинтересовавшись гидродинамикой в свя-

[1] *Гидродинамические маятники* бывают двух типов. К первому типу относятся физические маятники с полостью, в которой содержится жидкость. Свободная поверхность жидкости может совершать волновые движения, в полость может втекать жидкость или вытекать из нее в различных направлениях. Ко второму типу относятся физические маятники, колебания которых поддерживаются струей жидкости или периодически падающими на него каплями. Другие способы возбуждения колебаний рассмотрены Р. В. Полем (1971). Теория гидродинамического маятника еще не построена.

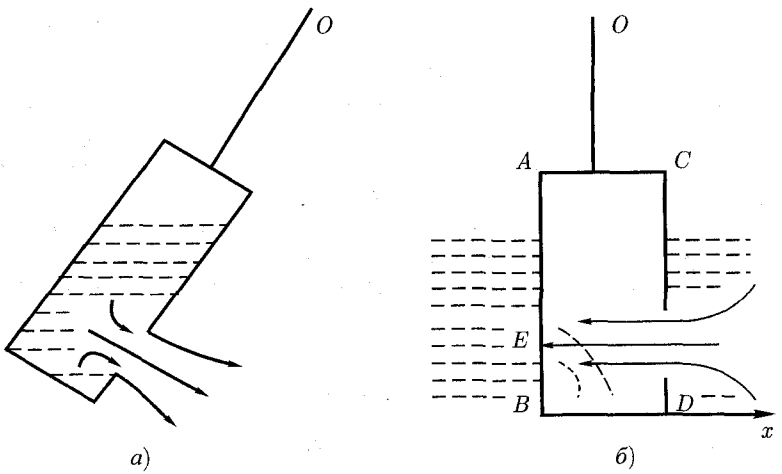


Рис. 3.10. Сосуд: *а* — с вытекающей жидкостью; *б* — с втекающей жидкостью

зи с воздействием ветровых нагрузок на строительные конструкции и, в частности, на свою знаменитую башню, построил в Париже аэродинамическую трубу. «Продувая» в ней сферы, он обнаружил парадокс, названный впоследствии его именем: вблизи критического числа Re ($\sim 150\,000$) сила сопротивления сферы резко — в 4–5 раз! — уменьшается с увеличением скорости. Такой необычный факт противоречит нашему опыту. Объяснение парадокса заключается в том, что вблизи критического значения числа Re происходит переход от ламинарного течения к турбулентному.

Другой француз, военный инженер П. Дюбуа (1734–1809) считается одним из основателей экспериментальной гидродинамики. В предисловии к своему классическому трехтомному труду «Принципы гидравлики» он писал: «Мы рассматриваем сопротивление воды и воздуха совершенно новым способом, не пользуясь вовсе прежней теорией, которая оказалась столько раз противоречащей опыту, и стараясь отыскать в опытах, до нас не имевшихся, новые точки зрения на предмет». Исследования Дюбуа показали, что сила сопротивления, действующая со стороны потока на *покоящееся* в трубе тело, в определенном диапазоне чисел Re меньше, чем сила сопротивления, действующая на *движущееся* с той же скоростью тело в покоящейся воде. В соответствии с принци-

пом относительности результат не должен зависеть от того, движется ли тело в покоящейся жидкости или жидкость обтекает покоящееся тело. Как же объяснить парадокс Дюбуа?

Его разгадал Н. Е. Жуковский в 1891 году (см. Жуковский, 1949). Оказывается, что поток в опытовом бассейне или в аэродинамической трубе более неравномерен, чем в «спокойном» море или в «спокойной» атмосфере, поэтому переход к турбулентному режиму течения здесь наступает раньше, то есть при докритических значениях Re, след за телом сужается, сопротивление падает.

Парадокс Дюбуа не утратил своей актуальности и в наше время. Различие между результатами трубного эксперимента и натурного, проводимого в условиях реального полета, остается для авиационных инженеров проблемой номер один.

В 1935 году английский зоолог Дж. Грей по скорости плавания дельфина рассчитал развиваемую им мощность, а по ней — вес мышц дельфина. Вес мышц оказался равным 120 кг, превысив в 10 раз (!) действительный вес. Неразгаданный до сих пор парадокс Грея порожден аномально низким сопротивлением тела дельфина, как и многих других морских существ.

Глава 4

Асимптотология

4.1. Инспекционный анализ

Этот термин[1] ввел в употребление американский гидродинамик Г. Биркгоф (1954), подразумевая под ним проверку инвариантности математической модели относительно различных групповых преобразований. Инспекционный анализ — это масштабирование явления и анализ сингулярностей, установление асимптотической слоистости и условной корректности, порядковая оценка величин и препарирование математической модели к численному расчету. Он является необходимой составляющей математического моделирования, как показано на рис. 4.1. Перечислим основные этапы инспекционного анализа.

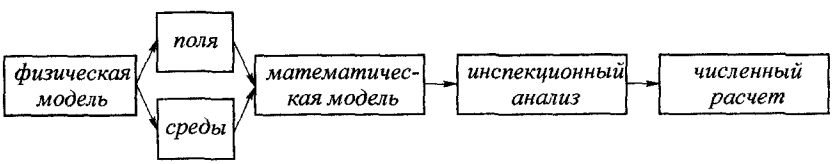


Рис. 4.1. Структурная схема теоретической гидродинамики

- Обезразмеривание уравнений и граничных условий. Составление реестра N определяющих (явных и скрытых) безразмерных параметров α_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$. Каждый из них ответственен за интенсивность некоторого эффекта, точнее — за отношение интенсивности

[1] С. Дж. Клайн (1968) инспекционный анализ называет фракционным анализом. Под этим термином он подразумевает «любой способ получения некоторой информации о решении задачи, когда нет времени и способов нахождения полного решения». Такое определение следует расширить и на тот случай, когда есть «время и способы нахождения полного решения».

этого эффекта к интенсивности базового эффекта. Поэтому список определяющих параметров очерчивает круг явлений, подлежащих математическому моделированию.

- Исследование с помощью методов возмущений предельных случаев, когда α_k стремятся к критическим значениям α_k^*, равным обычно 0, 1 или ∞. Есть два типа определяющих параметров. Если эффект, за который ответственен параметр α_k, при предельном переходе $\alpha_k \to \alpha_k^*$ исчезает равномерно по всей области течения, то такой параметр называется *однородным*. Если эффект, за который ответственен параметр α_k, при предельном переходе $\alpha_k \to \alpha_k^*$ не исчезает равномерно, а сосредоточивается в тонком слое, то такой параметр называется *неоднородным*. В этом случае происходит асимптотическое расслоение течения. В дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях неоднородный параметр стоит обычно при старшей производной.

- Поиск точных решений. Производится интуитивно или с помощью теоретико-группового анализа.

- Поиск приближенных решений.

- Анализ условной корректности.

В 2000 году на сайте Clay Mathematics Institute появилась статья под названием Millennium Prize Problems (автор — Ч. Л. Фефферман). Шестой в числе проблем тысячелетия названа проблема решения уравнения Навье – Стокса. Сформулировала ее О. А. Ладыженская (2003):

Проблема 1. *Дают ли уравнения Навье – Стокса вместе с начальными и краевыми условиями детерминистическое описание динамики несжимаемой жидкости или не дают?*

Не менее интересна для практики и другая проблема:

Проблема 2. *Дают ли уравнения Навье – Стокса вместе с начальными и краевыми условиями недетерминистическое описание динамики несжимаемой жидкости или не дают?*

4.2. Линеаризация

Линейные задачи динамики жидкости, интерес к которым никогда не ослабевал, дают убедительное представление об окружающем нас

мире, поскольку в этом прекрасном случае существующий в физике уровень строгости обычно совпадает с математическим уровнем строгости, подразумевающим корректность постановки задачи. Линеаризация — это всегда успех исследователя. «Линейные уравнения, — говорит известный физик Р. Фейнман, — очень важны. Они настолько важны, что физики и инженеры, пожалуй, половину всего времени тратят на решение линейных уравнений». Даже если исходная постановка задачи линейная, полезно представлять, как она получена в результате редукции более общей нелинейной прамодели и какова плата за достигнутое при этом упрощение.

Возможности и ограничения

Линеаризация — простейшая пертурбативная операция, применяемая как при физическом, так и при математическом моделировании явлений. Линеаризация физической модели достигается на основе молекулярно-кинетических теорий или эмпирических представлений и означает, что в выбранном ограниченном диапазоне условий постулируются линейными входящие в уравнения и граничные условия физические законы (уравнения состояния среды): деформации (Ньютона, Гука), фильтрации (Дарси), диффузии (Фика), теплопроводности (Фурье) и т. д. Такая линеаризация подразумевает пропорциональность величин. При $x \ll 1$ справедливо координатное разложение:

$$F(x) = \text{const} \cdot x + o(x).$$

Линейность — локальное свойство дифференцируемой функции, когда малый прирост функции пропорционален приросту независимой переменной. Именно локальность приводит к тому, что линейные уравнения состояния являются приближенными. Вот как об этом сказал Пуанкаре (1983): «Множество явлений повинуется закону пропорциональности — почему? Потому что в них встречается какая-нибудь весьма малая величина. Выведенный из наблюдений простой закон является в этом случае лишь применением общего аналитического правила, по которому исчезающе малый прирост функции пропорционален приросту независимой переменной. Так как наблюдаемые нами в действительности приросты не бесконечно малы, а только очень малы, то закон пропорциональности является лишь приближенным и простота — кажущейся. То же самое применимо к правилу суперпозиции малых движений, столь

плодотворному по своим применениям и образующему, между прочим, основу оптики».

С помощью математических преобразований, например, метода годографа, метода введения новой переменной, метода обратной задачи рассеяния, нелинейная задача сводится либо к линейной, либо к совокупности линейных задач. Кроме этого, линеаризация математической модели достигается путем разложения решения в асимптотический ряд и представляет собой малое (аналитическое или неаналитичское) возмущение к уже известному точному решению задачи — нулевому приближению, которое обычно выбирается тривиальным. При этом вводится малый параметр $\varepsilon \ll 1$ и асимптотическое разложение:

$$f(x;\varepsilon) = f_0(x) + \varepsilon f_1(x) + o(\varepsilon).$$

Возникающая при такой процедуре неравномерная пригодность решения приводит к локальным погрешностям, которые могут быть исправлены с помощью методов возмущений. Неравномерная пригодность разложения обычно связана с парадоксом бесконечности — неограниченным возрастанием функции в окрестности некоторой особенности, где нарушается условие линеаризации (малость возмущенного добавка по отношению к нулевому приближению).

Линеаризация дифференциальных и конечно-разностных уравнений с целью построения и обоснования численных алгоритмов широко применяется в вычислительной математике. Последовательная линеаризация лежит в основе одного из самых эффективных методов приближенного решения нелинейных уравнений различных типов — метода Ньютона.

Без линеаризации немыслима теория устойчивости.

Среди стохастических уравнений выделен класс так называемых *приводимых нелинейных систем*, для которых задача сводится к решению линейной системы и к определению вероятностных характеристик нелинейной функции внешнего возмущения. Линейные стохастические системы поддаются полному вероятностному анализу.

Невозможна линеаризация *существенно нелинейных процессов*: трансзвуковых, гиперзвуковых и отрывных течений, пограничного слоя.

Основоположником «нелинейной физики» считается Л. И. Мандельштам (Данилов, 2001; Трубецков, 2004). На самом деле, гидродинамики еще со времен Эйлера занимались решением нелинейных задач. В уравнении (1.3) нелинейность представлена членом $(\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u}$ — переносным ускорением. Простой, по своему физическому смыслу, член приводит к неразрешимым до сих пор проблемам.

Локальные решения уравнения Эйлера

Гидродинамические особенности имеют место на многообразиях меньшей размерности, чем размерность исходной задачи: точках, линиях, поверхностях. Локальное решение уравнения Эйлера в окрестности гидродинамических особенностей, представляющее собой координатное разложение по степеням расстояния от них, описывает некоторое внешнее невязкое течение, внутренняя структура которого обусловлена действием вязкости и поэтому должна определяться из решения уравнения Навье – Стокса. Внутренние разложения, уже не являющиеся координатными, не всегда известны. Даже в случае (Ван-Дайк, 1967; Сычев, 1987) когда решение внешней задачи о течении слабовязкой жидкости тривиально ($u = u_\infty$), решение внутренней задачи о симметричном (о несимметричном обтекании говорить не приходится!) обтекании задней кромки пластины O (рис. 4.2 *а*) известно, а решение задачи о симметричном обтекании передней кромки O (рис. 4.2 *б*) неизвестно.

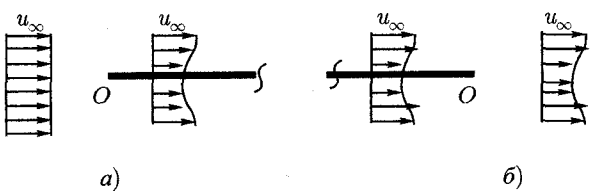


Рис. 4.2. Схемы симметричного обтекания: *а* — передней кромки; *б* — задней кромки

Рассмотрим плоское течение в окрестности точки отрыва потока от твердой поверхности. Такая задача сведется к нахождению комплексного потенциала $w(z,t) = \varphi + i\phi$ — аналитической функции комплексной переменной $z = x + iy$ (φ — потенциал скорости, ϕ — функция тока). На поверхности тела, заданной в виде $y = y_0(x,t)$, справедливо условие непротекания:

$$u\frac{\partial y_0}{\partial x} = v - \frac{\partial y_0}{\partial t}. \tag{4.1}$$

На вихревой пелене, заданной в виде $y = f(x,t)$, выполняется условие равенства давлений по обе ее стороны, а также условия равенства нормальных скоростей жидкости скорости перемещения вихревой пеле-

ны:

$$\frac{\partial\varphi^+}{\partial t}+\frac{1}{2}|\nabla\varphi^+|^2=\frac{\partial\varphi^-}{\partial t}+\frac{1}{2}|\nabla\varphi^-|^2, \tag{4.2}$$

$$u^\pm\frac{\partial f}{\partial x}=v^\pm-\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{4.3}$$

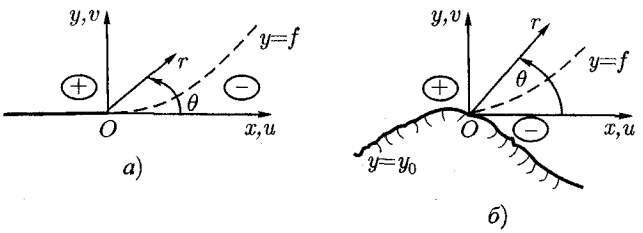


Рис. 4.3. Схемы отрыва потока: *а* — от острой кромки пластины; *б* — от гладкой поверхности

Пример 1. Рассмотрим течение в окрестности точки отрыва потока от острой кромки пластины (рис. 4.3 *а*). В точке отрыва должно выполняться условие Кутты о конечности скорости:

$$|\nabla\varphi|<\infty. \tag{4.4}$$

В соответствии с этим условием точка $z=0$ не является полюсом. Кроме того, по теореме Сохоцкого, точка $z=0$ не может быть существенно особой точкой, ибо при подходе к ней достигается любой, и в частности бесконечный, предел. Следовательно, точка $z=0$ — это точка ветвления. Поэтому разложение комплексной скорости представимо в степенном виде:

$$\frac{\partial w^\pm}{\partial z}=\sum_{k=0}^{\langle q\rangle}A_k^\pm(t)z^k+B^\pm(t)z^qe^{\mp iq\pi}+o(r^q), \tag{4.5}$$

где $\langle q\rangle$ — величина, равная целой части q. Выделен главный член собственного решения, определяющий его особенность и пропорциональный $B^\pm$.

Задача (4.1) – (4.5) имеет дискретный спектр решений: $2q=1,3,5,\ldots$ (Бетяев, 1994).

При этом форма вихревой пелены — степенная:

$$f(x,t) = a(t)x^{q+1} + o(x^{q+1}), \quad x > 0,$$

где $(q+1)A_0^{\pm}a(t) = \pm B^{\pm}\sin q\pi$, $A^{\pm} \neq 0$.

Градиент давления p на вихревой пелене конечный, а градиенты давления с разных сторон пластины в точке O связаны соотношением:

$$\frac{\partial p^+(0,0)}{\partial x} = -\left(\frac{A_0^+}{A_0^-}\right)^2 \frac{\partial p^-(0,0)}{\partial x}. \tag{4.6}$$

Пример 2. Рассмотрим течение в окрестности точки отрыва потока от гладкой поверхности тела (рис. 4.3 *б*), связав инерциальную систему координат с точкой отрыва O, перемещение которой в рамках локального разложения определить невозможно. Инерциальность не влияет ни на кинематику, ни на перепад давления на вихревой пелене. Величины в предотрывной области снова обозначим верхним индексом «+», а в заотрывной области — верхним индексом «−». Контур тела представим в виде регулярного ряда по степеням координаты x:

$$y_0(x,t) = -\frac{x^2}{2R_0} + O(x^3),$$

где $R_0(t)$ — радиус кривизны тела в точке O.

Отрыв потока идеальной жидкости — это образование циркуляции скорости в точке отрыва. Поскольку разрыв скорости здесь конечен, вихревая пелена отходит от тела по касательной.

Разложение комплексной скорости в предотрывной области аналогично разложению (4.5):

$$\frac{\partial w^{\pm}}{\partial z} = \sum_{k=0}^{\langle q \rangle} A_k(t)z^k + B(t)z^q e^{-iq\pi} + o(r^q), \tag{4.7}$$

$$A_k = A_{1k} + iA_{2k}, \quad \operatorname{Im} A_0 = \operatorname{Im} B = 0.$$

Все A_{2k} находятся из условия непротекания на теле в предотрывной области.

Задача (4.1)–(4.4), (4.7) имеет дискретный спектр решений: $2q = 1, 3, 5, \ldots$ (Бетяев, 1994). В заотрывной области ($y_0 < y < f$) решение представимо в виде регулярного ряда:

$$\frac{\partial w^-(z,t)}{\partial z} = -\frac{a'}{a}\frac{z}{q+2} + o(r).$$

Из условия непротекания на вихревой пелене определяется форма вихревой пелены:

$$f(x,t) = a(t)x^{q+1} - \frac{x^2}{2R_0} + o(x^2, x^{q+1}),$$

где $(q+1)aA_0 = B\sin q\pi$.

Кривизна пелены бесконечна при $q < 1$ и равна кривизне тела $1/R_0$ при $q > 1$. Скорость роста циркуляции $\Gamma(t)$ равна

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{1}{2}(u^+)^2.$$

Принцип суперпозиции

Для линейных уравнений справедлив принцип суперпозиции, которому подчиняются электромагнитные волны, излучение, теплопередача и т. д. В квантовой механике принцип суперпозиции играет фундаментальную роль. Если в классической физике принцип суперпозиции — это правило, то в гидродинамике, где властвуют нелинейные законы, — исключение. Зная два течения порознь, нельзя судить об их суммарном действии.

Однако даже для линейных уравнений из принципа суперпозиции еще не следует, что можно «складывать» два течения при наличии твердых границ или разрывов. Так, если известно решение линейной задачи $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1)$ об обтекании однородным потоком жидкости некоторого тела, центр которого расположен в точке $\boldsymbol{r}_1$, то сумма

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_2) \tag{4.8}$$

не будет являться решением задачи об обтекании двух тел исходной формы, отстоящих друг от друга на расстоянии $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 \neq 0$, так как не будут выполняться условия непротекания на каждом из них.

Аналогичный запрет на принцип суперпозиции существует в линейных задачах истечения, но опровержение в этом случае далеко не очевидное. Пусть известен параметрический набор решений $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1)$ задачи об истечении жидкости из щели в некоторой заданной поверхности S для всех возможных значений $\boldsymbol{r}_1$ — координат центра щели. Будет ли сумма (4.8), каждое из слагаемых которой удовлетворяет условию непротекания на непроницаемой части поверхности S, решением

задачи об истечении жидкости через систему двух щелей, центры которых расположены в точках $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$? Нет, не будет, ибо первое слагаемое имеет разрыв скорости в месте виртуального расположения второй щели S_2 (рис. 4.4), а второе слагаемое, в свою очередь, имеет разрыв в месте виртуального расположения первой щели S_1! Построенное таким образом решение (Брутян, Крапивский, 1986) разрывно, что нефизично.

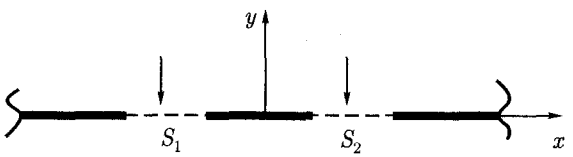


Рис. 4.4. Схема расположения двух щелей S_1 и S_1 в плоскости x, y (штриховой линией показаны виртуальные разрывы скорости)

Две стадии замедленного движения тела по инерции

Первая стадия замедленного движения тела по инерции рассмотрена в разделе 3.4.2. На второй стадии необходим учет трения. При $u_0 \to 0$ течение становится ползущим, давление линейно зависит от u_0, $F = O(u_0)$. Из (3.6) заключаем, что $u_0 = a\exp(-\beta t) + o[\exp(-\beta t)]$, $\beta > 0$.

Отнеся координаты к некоторому характерному размеру λ и положив:

$$\boldsymbol{u} = a\exp(-\beta t)\,\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r}) + o[\exp(-\beta t)],$$
$$p = \beta a\exp(-\beta t)P(\boldsymbol{r}) + o[\exp(-\beta t)],$$

из уравнения Навье–Стокса (1.3) находим:

$$\nabla P = \boldsymbol{U} + \sigma\nabla\boldsymbol{U}, \quad \nabla\boldsymbol{U} = 0, \quad \sigma\beta\lambda^2 = \nu. \tag{4.9}$$

Как и в стационарном решении, в задаче об обтекании кругового цилиндра или сферы переменные в (4.9) разделяются, функция тока ψ имеет вид:

$\psi(r,\theta) = \Psi(r)\sin\theta$ — для цилиндра,

$\psi(R,\vartheta) = \Psi(R)\sin^2\vartheta$ — для сферы.

Здесь r, θ — полярные координаты, R, ϑ — сферические.

Аналогичным образом находится решение задачи о квазистационарном симметричном истечении жидкости из плоской щели или из круглого отверстия под действием перепада давления, затухающего по закону $\exp(-\beta t)$.

При $\sigma \ll 1$ эффекты нестационарности представляют собой малый добавок к нестационарному ползущему течению. При $\sigma \gg 1$ малы эффекты вязкости. При $\sigma = 0$ течение безвихревое:

$$\nabla P = \boldsymbol{U}, \quad \nabla \boldsymbol{U} = 0.$$

Безвихревой предел движения тела реален, если вихри, возникшие при $t = O(1)$, отдалились от тела на большое, по сравнению с λ, расстояние.

Хотя путь торможения конечен, парадокс бесконечности остается: время торможения $t \to \infty$. На самом деле предложенная теория справедлива только до того момента, пока скорость движения тела u_0 не станет равной по порядку величины осредненной скорости флуктуаций окружающей его среды.

4.3. Редукция к меньшему числу независимых переменных

Трехмерные нестационарные течения труднодоступны как для экспериментального, так и для математического моделирования. Избавление от временной переменной или от одной из пространственных координат открывает возможности более полного исследования задачи и более полного понимания процесса. По существу, такое избавление связано с представлением искомой функции четырех переменных в виде произведения двух функций от меньшего числа переменных, причем одна из функций известна.

Автомодельные, конические и квазиконические течения — это известные примеры уменьшения числа независимых переменных. Метод эквивалентности координат эффективно используется в теории однородной изотропной турбулентности для обоснования перехода 3D→1D. В линейной теории сверхзвуковых течений для уменьшения числа независимых переменных используется переход к характеристическому контрольному контуру (Никольский, 1981). Широко используются методы *контурной динамики*, позволяющие свести задачу об эволюции вихревой области к задаче об эволюции ее границы. Одним из эффективных способов избавления от какой-либо переменной является разложение

решения в координатный ряд по этой переменной; такие примеры уже рассматривались и будут еще рассмотрены ниже.

Двумерные течения

Предполагается, по определению, что плоское течение безгранично в обе стороны по третьей координате z: $-\infty < z < \infty$. В реальных условиях течение ограничено, имеет масштаб l_z по третьей координате. Гипотеза 3D→2D справедлива в области $|z| \ll l_z$. Течение в окрестности концевых зон, где $|z| \sim l_z$, следует рассматривать отдельно. Влияние этих зон сказывается в генерации волновых структур по оси z или в потере устойчивости течения в целом. С увеличением амплитуды плоские гармонические волны на поверхности широкого бассейна переходят в волны Стокса, а затем становятся трехмерными и турбулентными.

Переход 3D→2D приводит к принципиальным упрощениям, так как исключает растяжение и разворот вихревых линий. Глобальная разрешимость задачи Коши для ограниченных двумерных областей была решена положительно О. А. Ладыженской (1975). Согласно ее результатам все предельные (при $t \to \infty$) режимы двумерных уравнений Навье – Стокса описываются конечномерной динамической системой.

Скользящим называется течение, в котором составляющие скорости (u, v, w) в прямоугольной системе координат (x, y, z) не зависят от третьей координаты z. Отличие от плоского течения заключается в том, что здесь присутствуют все три компоненты вектора вихря $\boldsymbol{\omega}$. Две составляющие скорости u и v определяются независимо от третьей составляющей w.

Вихревые линии скользящего течения могут растягиваться. Уравнения Эйлера допускают разрыв компоненты скорости w на линии $y = y_0(x, t)$. Такой разрыв называется *скользящим*. Его эволюция определяется из кинематического условия непрерывности нормальной составляющей скорости:

$$\frac{\partial y_0}{\partial t} + v = u\frac{\partial y_0}{\partial x}. \tag{4.10}$$

Динамическое условие сводится к непрерывности давления. Скользящий разрыв может совпадать с разрывом касательной к нему составляющей скорости, лежащей в плоскости x, y, то есть с обычным тангенциальным разрывом скорости.

Движение тангенциального разрыва, как и скользящего, определяется одним и тем же уравнением (4.10), поэтому произвольный разрыв

не распадается на тангенциальный и скользящий. Следовательно, скользящий разрыв, совпадающий с тангенциальным разрывом при $t = 0$, не может отделиться от него при $t > 0$.

Имеется некая аналогия между скользящим течением и осесимметричным течением с закруткой, когда роль третьей координаты, от которой решение не зависит, играет азимутальный угол. В последнем случае $(\boldsymbol{\omega}\nabla)\boldsymbol{u} = \frac{1}{r}\{rw, \boldsymbol{u}\}$, где w — азимутальная составляющая скорости, фигурными скобками снова обозначены скобки Пуассона. Поэтому вихревые нити осесимметричного течения с закруткой могут растягиваться.

Тот факт, что в осесимметричном течении третья координата циклическая, позволяет применять методы осреднения по этой координате.

Автомодельные решения

Автомодельное решение является виртуально-промежуточной асимптотикой некоторого общего решения (Баренблатт, 1982; Зельдович и Райзер, 1966). О выходе этого решения на автомодельный режим в некотором пространственно-временном интервале можно говорить только в смысле его близости к автомодельному решению с заданной погрешностью. Влияние неавтомодельных факторов (асимметрии, вязкости, реальных свойств среды и т. д.) существенно при малых и больших временах, в окрестности особых точек решения и на бесконечности.

Для целенаправленного поиска точных решений дифференциальных уравнений используются теоретико-групповые методы. Однако для нахождения автомодельных решений такой подход был бы равносилен стрельбе из пушек по воробьям. Поэтому с этой целью используется теория размерностей.

Автомодельность означает, что в четырехмерном пространстве $\boldsymbol{r}$, t введены *квазиконические координаты* $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}/(at^n), t$, и зависимость от t выписана в явном (степенном) виде, $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$. Таким способом уменьшено число независимых переменных на единицу. Переход к вырожденным автомодельным решениям ($n = 0$ и $n = \infty$) рассмотрен Седовым (1977), классификация автомодельных решений дана Бетяевым (1995).

Прежде всего следует выделить временной диапазон, в котором существует автомодельное решение $t_1 \ll t \ll t_2$. Будем различать две формы автомодельных течений. Если оно возникло недавно, то есть $t_1 = = O(t)$, то, ввиду инвариантности решения относительно сдвига по вре-

мени, всегда можно считать, что $t_1 = 0$, $t_2 = \infty$. Такое *полурешение* существует в положительном интервале времени: $0 < t < \infty$ — и описывает расширение. Если течение зародилось давно, то есть $t_1 = \infty$, то такое полурешение существует в отрицательном интервале времени: $-\infty < t < 0$ — и описывает коллапс. Автомодельное течение локально не только по координате, но и по времени, так как описывает либо начальную, либо конечную стадии процесса. Условия сопряжения двух полурешений при $t = 0$ зависят от конкретной постановки задачи и должны определяться из (интегральных) законов сохранения.

Автомодельное течение *физически корректно*, если влияние неавтомодельного фактора, ответственного за возникновение течения, существенно в начальный момент времени $t = t_1$, а в дальнейшем (при $t \to t_2$) — его влияние уменьшается[1]. В случае течения идеальной жидкости при $n \neq 0.5$ главным неавтомодельным фактором является вязкость. Так как число Рейнольдса $\mathrm{Re} = u_\infty \lambda/\nu = O((\pm t)^{2n-1})$, где верхний знак берется, если течение происходит в положительном интервале времени, а нижний — если течение происходит в отрицательном интервале времени, то $\mathrm{Re} \to \infty$ при $t \to t_1$. Поэтому полурешение, определенное в интервале $0 < t < \infty$, физически корректно при $n > 0.5$, полурешение, определенное в интервале $-\infty < t < 0$, физически корректно при $n < 0.5$.

Уравнение Навье – Стокса (1.3) имеет автомодельное решение только при $n = 0.5$; уравнение Эйлера формально допускает автомодельность при любом значении n.

Локальная задача о распаде произвольного разрыва одномерна и автомодельна.

Автомодельная задача обтекания — это задача обтекания расширяющегося (сужающегося) по закону $(\pm t)^n$ и движущегося по тому же закону тела.

Автомодельная задача истечения — это задача истечения идеальной жидкости из расширяющейся или сужающейся по закону $(\pm t)^n$ щели под действием пропорционального $(\pm t)^{2n}$ перепада давления[2]. При малых расходах автомодельная задача истечения допускает линеаризацию. Показано, что плоская линейная автомодельная задача истечения при $n < 1$ некорректна в классе ограниченных функций, так как ее решение имеет логарифмическую особенность (Бетяев, 1994).

[1]Даже для физически корректного течения не исключен переход к турбулентному режиму из-за потери устойчивости.

[2]В случае ползущего течения давление пропорционально $(\pm t)^n$.

Спиральные вихри и волны

Попытка определить спиральную кривую с помощью такого терми на, как *виток*, приводит к *парадоксу кучи*. Сколько витков должн иметь спираль: один, два, три?!

Определение. *Плоской спиралью*[1] *называется плоская несам пересекающаяся кривая* $r = r(\theta)$, *делающая один или более витк (поворотов на* 2π*) вокруг точки или замкнутой кривой таким обр зом, что* $r(\theta + 2\pi) \neq r(\theta)$.

Определение. *Спиральной поверхностью называется повер ность с выделенной осью, в нормальной плоскости к которой сечени представляет собой плоскую спираль.*

Аналогичным образом определяется пространственная спиральна кривая. В гидродинамике, как и в топологии, принимается, что плоска спиральная кривая обходит вокруг точки или замкнутой кривой беск нечное число раз. Пространственная спиральная линия наматывается н линию или поверхность тоже бесконечное число раз. Поперечное сеч ние спиральной поверхности представляет собой плоскую спираль.

Спирали бывают телесные (материальные), вихревые и волновы Вихревые спирали появляются вследствие растяжения вихревых лин или бифуркации (смена топологической особенности типа «центр» н особенность типа «фокус»). Механизм растяжения вихревых линий п ясним на следующем простом примере. Пусть растяжимая полубеск нечная прямая ($r > 0$, $\theta = 0$) в момент времени $t = 0$ приобрета угловую скорость, равную r^λ (рис. 4.5). Если $\lambda < 1$, то при $t > 0$ прям трансформируется в спираль с центром в точке O. Если $\lambda = 1$, то л вращается как твердое тело. Если $\lambda > 1$, то прямая трансформирует в спираль с центром в бесконечно удаленной точке.

Успехи теории броуновского движения и кинетической теории газ обусловлены однородностью и неизменностью внутренней микрострук туры описываемых ими процессов. «Кирпичики» турбулентного теч ния представляют собой не однородные объекты, а достаточно больш набор разнообразных по типу ($10 \div 20$) и многочисленных по колич ству спиральных когерентных вихрей, которые рождаются, развивают

[1] В математическом словаре (М.: Советская энциклопедия, 1988) дается такое неуд ное определение спирали: «Спираль — плоская кривая, которая обычно (!? — С.К.) обход вокруг одной (или нескольких) точки, приближаясь или удаляясь от нее». Такому опре лению удовлетворяет ... эллипс!

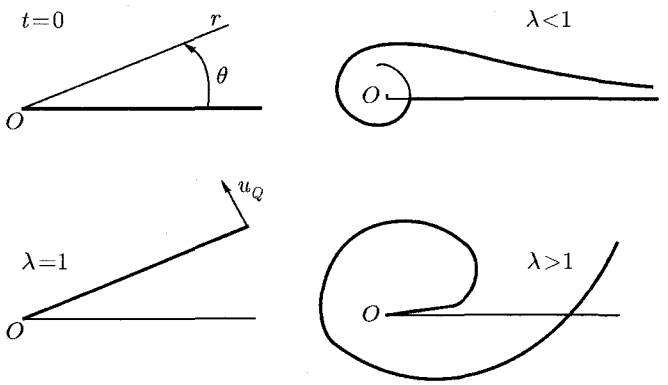


Рис. 4.5. Деформация первоначально ($t = 0$) покоящегося полубесконечного отрезка прямой с угловой составляющей скорости $u_\theta = r^\lambda$

и умирают во внешнем по отношению к ним *случайном поле скоростей*. Это обстоятельство препятствует созданию математической модели турбулентности.

Получить решение локальной задачи в ядре спирального вихря можно следующим образом. Совместим ось x с осью спирального вихря. При анализе особенности в центре вихря зависимость от x оказывается замороженной, продольная координата входит как параметр. Форма спирали в поперечной к оси плоскости естественно задать в полярных координатах как $\theta = \theta_0(r, t)$. Предположение о том, что при $r \to 0$ течение «забывает» об условиях своего происхождения, оставляя в «памяти» только один кинематический параметр a с размерностью $[a] = LT^{-n}$, приводит к автомодельности. Гипотеза автомодельности и предельный переход $r \to 0$ *сокращают число независимых переменных от 3 до 1*, единственной переменной остается *спиральная координата* $0 < \eta = \theta - \theta_0 \leqslant 2\pi$, дифференциальные уравнения становятся обыкновенными. Таким образом получается *локальное решение* — координатное разложение в ядре вихревой пелены.

Уравнения Эйлера допускают локальные решения в виде спиральных вихрей, которые могут быть либо тангенциальным разрывом, либо свободной границей (изобарический вихрь). Для логарифмических вихрей — точных решений уравнений Эйлера — показано (Бетяев, Гайфуллин, 2001), что число решений в случае тангенциального разрыва равно 9, *число решений в случае изобарического вихря равно 5*.

Такой же метод применим в нелинейной динамике для нахождения таких локальных решений, как спиральные волны, которые наблюдаются в химически или биологически активных средах (реакция Белоусова – Жаботинского, эволюция дислокаций, спиновая детонация, аритмия сердечной мышцы). В численном эксперименте спиральные волны появляются как решения нелинейных кинетических уравнений диффузионного типа: теплопроводности, Гинзбурга – Ландау, брюсселятора, Курамоты – Сивашинского и т. д. Обнаружены вращающиеся спирали, когда $\theta_0 = a(r)b(t)$, и квазистационарные волны, когда $\theta_0 = a(r)$.

Конические и квазиконические течения невязкой жидкости

Коническое течение можно трактовать и как частный случай разделения переменных, и как особую форму автомодельности, и как координатное разложение в окрестности складки. Коническим называется течение, скорость которого априори известным, степенным образом зависит от линейной координаты. Если жидкость невязкая, то эта зависимость однородна: все компоненты вектора скорости одинаковым образом зависят от радиальной координаты:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u} = R^k \boldsymbol{U}(\vartheta, \varphi, t) + o(R^k) \text{ — в сферической системе координат,} \\ &\boldsymbol{u} = r^k \boldsymbol{U}(\theta, t) + o(r^k) \text{ — в полярной системе координат,} \end{aligned} \tag{4.11}$$

где φ — азимутальный угол относительно оси $\theta = 0$.

В случае нестационарного течения первый член разложения (4.11) является точным решением уравнения Эйлера при $k = 1$. В случае стационарного течения *показатель коничности* k формально может быть произвольным.

В теории конических течений условия на бесконечности не выставляются, поэтому течение вдали от вершины описывается неправильно, и поэтому появляются дополнительные, так называемые *скрытые параметры*, которые нельзя определить заранее, например, из соображений размерности. Наличие скрытых параметров приводит к дополнительной многозначности локальной теории.

С другой стороны, при определённых распределениях завихренности и закрутки в теории конических течений идеальной жидкости имеет место парадокс отсутствия решения: оно либо становится сингулярным при некотором фиксированном значении определяющего параметра, либо его не существует в некотором диапазоне значений этого параметра.

При наличии твердых границ в теории конических течений различают *задачи обтекания* и *задачи перетекания*. К первому типу относятся задачи обтекания тел, не имеющих характерного размера, как-то: вершины конусов, клиньев, треугольных пластин. Зависимость показателя коничности k от угла при вершине треугольной пластины $2\theta_0$ в случае безотрывного обтекания определяется в результате решения линейной задачи на собственные значения, $0 < \theta_0 \leqslant \pi/2$ (Браун, Стюартсон, 1969).

Задача перетекания через треугольный вырез получится, если $\theta_0 > \pi/2$. Примером конического течения без твердых границ является распад вихревой нити (Зубцов, 1989).

Квазиконическое течение является формальным обобщением конического течения. Скорость стационарного квазиконического течения невязкой жидкости представима в виде:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(x,y,z) &= A(x)\boldsymbol{U}(\xi,\eta) + o(A) \text{ в декартовой системе координат,} \\ \boldsymbol{u}(x,r,\theta) &= A(x)\boldsymbol{U}(\zeta,\theta) + o(A) \text{ в цилиндрической системе координат,} \end{aligned} \tag{4.12}$$

где $\xi = yx^{-m}$, $\eta = zx^{-m}$, $\zeta = rx^{-m}$, $m > 1$ — показатель квазиконичности.

Не будучи точным решением, квазиконическое решение представляет собой координатное разложение в окрестности точки $x = y = z$. Форма твердых границ имеет степенной вид относительно выделенной оси x.

Рассмотрим плоское и осесимметричное течения внутри «нулевого угла».

В плоском случае (рис. 4.6 *а*) течение заключено внутри области $\xi_2 \leqslant \xi \leqslant \xi_1$, функция тока ψ зависит от x и ξ. В осесимметричном случае (рис. 4.6 *б*) течение заключено внутри области $\zeta \leqslant \zeta_0$, функция тока Ψ зависит от x и ζ. На границах областей выполняются условия непротекания:

$$\begin{aligned} \psi(x,\xi_{1,2}) &= 0 \text{ в плоском случае,} \\ \Psi(x,\zeta_0) &= 0 \text{ в осесимметричном случае.} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Решения ищутся в виде разделенных переменных:

$$\psi(x,\xi) = b(x)\psi_0(\xi) + o(b), \quad \Psi(x,\zeta) = B(x)\Psi_0(\xi) + O(B).$$

Асимптотические решения двумерного уравнения Лапласа при $x \to 0$, удовлетворяющие условиям (4.13), с точностью до произвольного мно-

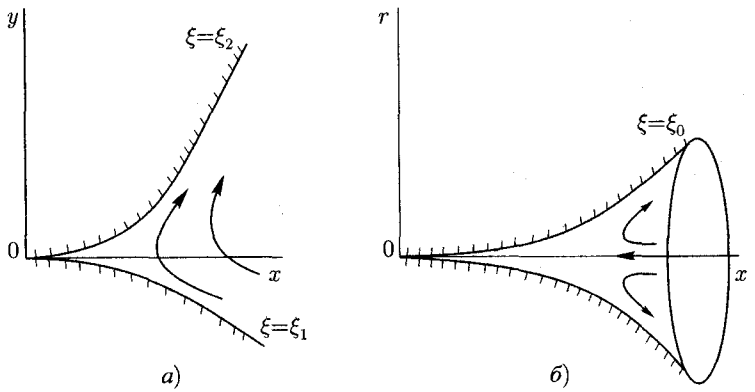


Рис. 4.6. Схема течения внутри «нулевого угла»: *а* — плоского; *б* — осесимметричного

жителя имеют вид:

$b(x)=\exp\left(-\dfrac{\pi}{\xi_1-\xi_2}\dfrac{x^{1-m}}{m-1}\right)$, $\psi_0(x,\xi)=\sin\left(\dfrac{\xi-\xi_2}{\xi_1-\xi_2}\pi\right)$ в плоском случае,

$B(x)=\exp\left(\dfrac{\lambda}{1-m}x^{1-m}\right)$, $\Psi_0(x,\zeta)=\zeta I_1(\lambda\zeta)$ в осесимметричном случае,

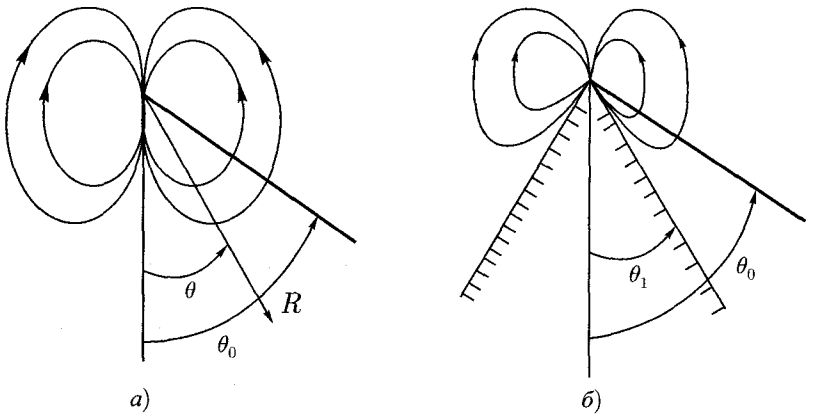
где I_1 — функция Бесселя первого рода, λ — параметр, определяемый из условия непротекания.

Вихревой монополь — реальность или артефакт?

Дирак построил изящную теорию *магнитного монополя* — физического объекта, эквивалентного единичному магнитному полюсу. Монополь Дирака является гипотетической частицей, обладающей положительным или отрицательным «магнитным зарядом» — точечным источником радиального магнитного поля.

В силу известной аналогии между законами электродинамики и законами гидродинамики уместно поставить вопрос о существовании *вихревого монополя* — точечного пространственного вихря.

Плоский точечный вихрь не является таким монополем, так как в пространстве он выглядит вихревой линией. Сферически симметрич-



а) *б)*

Рис. 4.7. Линии тока виртуального вихревого монополя: *а* — свободного; *б* — присоединенного

ный вихрь не существует вследствие известной из теории функций «теоремы о невозможности причесать ежа». Поэтому остается рассмотреть осесимметричное течение. Известные вихри такого рода (вихревые кольца, вортоны) имеют параметрический произвол и характерный размер вихревой зоны, то есть не являются точечными.

Осесимметричным точечным вихрем будем называть коническое стационарное течение невязкой жидкости с функцией тока $\Psi(r,\theta) = r^{k+1}\sigma(\theta)$, $k \neq 1$. Если полный расход жидкости через сферу, окружающую начало координат O, равен нулю, то есть точечный вихрь отсутствует, то выполняется условие: $\sigma(0) = \sigma(\pi) = 0$. В соответствии с этим условием линия тока, исходящая из точки O вдоль луча $\theta = 0$, будет входить в точку O вдоль луча $\theta = \pi$. Линии тока такого виртуального монополя схематично представлены на рис. 4.7 *а*. Функция $\sigma(\theta)$ имеет максимум в некоторой точке $\theta = \theta_0$, здесь поток разворачивается ($u_r = 0$). Монополь симметричен относительно плоскости $\theta = \pi/2$, если $\theta_0 = 0$.

Вихревой монополь может быть (?) присоединенным к вершине конуса с полууглом раствора θ_1, как показано на рис. 4.7 *б*. Наконец, можно еще более усложнить ситуацию, введя конические поверхности разрыва касательной к ним составляющей скорости.

Осесимметричное течение характеризуется циркуляцией окружной скорости $\Gamma(\psi)$ и величиной $H(\psi) = p + |\boldsymbol{u}|^2/2$. Первая величина опреде-

ляет закрутку, вторая — завихренность. Уравнение Эйлера для функции тока имеет вид:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}-\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=r^2H'\sin^2\theta-\Gamma\Gamma'. \tag{4.14}$$

Уравнение сохранит степенную зависимость от r, если H и Γ степенным образом зависят от ψ: $H(\psi)=a\psi^s$, $\Gamma\Gamma'=b\psi^q$. Частные случаи получаются, если пренебречь каким-либо из трех факторов: инерцией, закруткой, завихренностью. В общем случае уравнение (4.14) станет обыкновенным, и в нем сохранятся все члены, если $s=2q$, $q(k+1)=k-1$. Вопрос о существовании его решений остается открытым.

Конические течения сильновязкой жидкости

Если уравнения Навье – Стокса (1.3) имеют точные конические решения только при $k=-1$, то уравнения Стокса (1.4) допускают такие решения при любых значениях показателя k.

Рассмотрим отрыв плоского сильновязкого потока от твердой поверхности[1]. На рис. 4.8 представлена схема такого отрыва: случай $\theta_0=\pi$ соответствует отрыву от гладкой поверхности, случай $\theta_0>\pi$ — отрыву от тупой кромки, случай $\theta_0=2\pi$ — отрыву от вершины пластины ($\theta_0=\theta_1+\theta_2$). Плоская задача о ползущем коническом течении вблизи точки отрыва есть задача на собственные значения, сводящаяся к двум трансцендентным уравнениям для определения неизвестных k и θ_1 в зависимости от β и θ_2, где $\beta=\nu_1/\nu_2$ — отношение коэффициентов вязкости соприкасающихся потоков, стекающих с разных граней клина.

Определение. *Коническое течение называется неоднородным, если разложения составляющих скорости по степеням R различны.*

Коническое решение (4.11) однородно. Рассмотрим пример неоднородного конического решения:

$$\begin{aligned} u_r&=r^{2n+1}u(\theta)+o(r^{2n+1}), & u_\theta&=r^{2n+1}v(\theta)+o(r^{2n+1}),\\ u_\varphi&=r^{2n}w(\theta)+o(r^{2n}), & p&=r^{2n}p_0(\theta)+o(r^{2n}). \end{aligned} \tag{4.15}$$

[1]При отрыве невязкого потока от гладкой поверхности $\theta_1=0$ (или $\theta_2=0$), при отрыве невязкого потока от тупой или острой кромки $\theta_1=\pi$ (или $\theta_2=\pi$). К точке торможения невязкая линия тока подходит симметричным образом, под углом $\theta_1=\theta_2$.

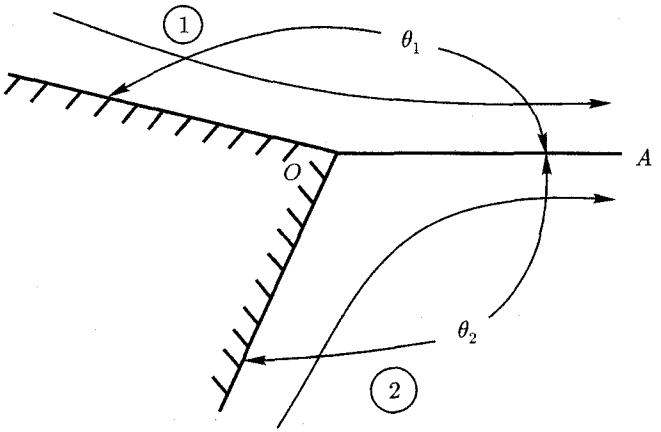


Рис. 4.8. Схема отрыва ползущего течения (OA — линия отрыва)

Подстановка этого разложения в систему (1.1) показывает, что она расщепляется на две части, нелинейность сохраняется. Уравнение для определения $w(\theta)$ родственно уравнению Лежандра и решается независимо от остальных:

$$w'' + w' \operatorname{ctg}\theta + [n(n+1) - \sin^{-2}\theta]w = 0.$$

Остальные 3 уравнения служат для определения неизвестных функций $u_r(\theta)$, $u_\theta(\theta)$, $p_0(\theta)$ при заданной закрутке $w(\theta)$.

Если для составляющей скорости u_φ вместо (4.16) ввести разложение: $u_\varphi = \dfrac{\Gamma}{r\sin\theta} + r^n w(\theta) + o(r^n)$, то задача линеаризуется. Такое разложение описывает течение с вихревой нитью, расположенной на оси $\theta = 0$ и/или на оси $\theta = \pi$.

4.4. Сингулярности

Теорема Лере о существовании обобщенных решений уравнения Навье – Стокса (Фриш, 1998) не исключает появления сингулярностей как в вязком, так и в невязком течениях. По своей природе сингулярности бывают параметрические, пространственные, конечновременные и геометрические. Поскольку общая теория возникновения сингулярностей отсутствует, ограничимся такой классификацией и анализом отдельных примеров.

Параметрическая сингулярность

Параметрическая сингулярность появляется, когда некоторый определяющий параметр α стремится к критическому значению α^*. Она либо сопутствует бифуркации, либо является параметрическим резонансом.

Сингулярность, сопутствующая бифуркации (переходу от автомодельного решения 1-го рода к автомодельному решению 2-го рода), впервые рассматривалась в работе Стернберга и Койтера (см. Баренблатт, 1982), посвященной плоской задаче об упругой деформации бесконечного клина под действием пары сил с моментом, приложенным к его вершине. Оказалось, что при приближении угла раствора клина α к критическому значению $\alpha^* \approx 0.7\pi$ напряжения во всех точках клина устремляются к бесконечности.

Сингулярность Стернберга – Койтера была обнаружена при решении бигармонического уравнения в клиновидных и конических областях. В гидродинамике сингулярность Стернберга – Койтера была обнаружена в нескольких задачах о ползущем течении жидкости и в задачах конвекции. Хотя такая сингулярность обнаружена в линейных задачах, нет сомнения, что она присуща и нелинейным задачам.

Смысл параметрического резонанса поясним на простом примере вынужденных колебаний маятника. Задача, $y''(t) + y(t) = \sin \omega t$, $y(0) = y'(0) = 0$, $\omega > 0$, имеет решение:

$$y(t) = \frac{\sin \omega t - \omega \sin t}{1 - \omega^2}, \tag{4.16}$$

ограниченное по амплитуде при $\omega \neq 1$. Параметрический резонанс наступает тогда, когда параметр надкритичности $\varepsilon = \omega - 1 \to 0$. С другой стороны, при $\varepsilon = 0$ существует точное решение задачи:

$$y_0(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t), \tag{4.17}$$

амплитуда колебаний которого неограниченно возрастает при $t \to \infty$.

Как происходит переход от решения (4.16) к решению (4.17)? Для ответа на этот вопрос построим асимптотическое разложение решения (4.16) по малому параметру ε:

$$y(t) = y_0(t) + O(\varepsilon, \varepsilon t). \tag{4.18}$$

При $t = O(\varepsilon^{-1})$ решение (4.19) «отваливает» от решения (4.17), его амплитуда становится большой, но перестает расти. В этом смысле решение (4.18) является асимптотой точного решения при $\varepsilon t \ll 1$.

В случае параметрического резонанса решения в области $\alpha < \alpha^*$ и в области $\alpha > \alpha^*$ имеют одинаковую форму.

Оказалось, что параметрическая сингулярность свойственна и невязким течениям жидкости. В отличие от плоского ползущего течения, описываемого уравнением четвертого порядка (бигармоническим), плоские течения невязкой жидкости описываются уравнениями второго порядка (уравнениями Лапласа или Пуассона). Рассмотрим примеры таких течений.

Пример 1. Стационарное вихревое течение жидкости в бесконечном клине описывается уравнением Пуассона:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -\omega(\psi). \tag{4.19}$$

На гранях клина $\theta = \pm\theta_0$ выполняются условия непротекания:

$$\psi(r, \pm\theta_0) = 0. \tag{4.20}$$

При $\omega = \omega_0 = \text{const}$ непрерывное коническое течение в прямом угле ($\theta_0 = \rho/4$) невозможно. Решение задачи при произвольном значении θ_0 является суперпозицией потенциального решения $cr^{\pi/2\theta_0}\cos(\pi\theta/2\theta_0)$, где c — произвольная константа, и вихревого решения, которое имеет вид:

$$\psi_1(r, \theta) = \omega_0 r^k \Psi(\theta). \tag{4.21}$$

Потенциальное решение не имеет особенности при $\theta_0 \to \pi/4$. Вихревое решение находится после подстановки (4.21) в (4.19)–(4.20):

$$\psi_1(r, \theta) = -\frac{1}{4}\omega_0 r^2 \left(1 - \frac{\cos 2\theta}{\cos 2\theta_0}\right).$$

При $\theta_0 \to \pi/4$ решение имеет особенность Стернберга – Койтера типа $(\pi/2 - \theta_0)^{-1}$, показатель коничности потенциального решения $\pi/2\theta_0$ стремится к показателю коничности вихревого решения, равного 2. Такая же особенность имеется при $\theta_0 = 3\pi/4$.

Существует ли ограниченное решение задачи при $\theta_0 = \pi/4$? Да, существует. Его легко построить, если суперпозировать оба решения (вихревое и потенциальное) при произвольном значении θ_0, а затем подобрать константу c таким образом, чтобы исключить параметрическую особенность. Общее решение

$$\psi = cr^{\pi/\theta_0}\cos\frac{\pi\theta}{2\theta_0} + \frac{1}{4}\omega_0 r^2\left(\frac{\cos 2\theta}{\cos 2\theta_0} - 1\right)$$

ограничено при $\theta_0 = \pi/4$, если $c = -\frac{1}{4}\frac{\omega_0}{\cos 2\theta_0}$. Переходя к пределу $\theta_0 \to \pi/4$, окончательно получаем:

$$\psi_0 = -\frac{1}{4}\omega_0 r^2 - \frac{1}{\pi}\omega_0 r^2(\ln r \cos 2\theta - \theta \sin 2\theta).$$

Сингулярность, возникающая в вихревом решении, полностью компенсируется равной и противоположной по знаку сингулярностью, возникающей в потенциальном решении.

Пример 2. Рассмотрим безвихревое течение между двумя бесконечными сторонами угла, вращающимися с угловыми скоростями $\theta_1'(t)$ и $\theta_2'(t)$, где $\theta_2 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$. Функция тока удовлетворяет граничным условиям непротекания: $\psi(r, \theta_{1,2}, t) = r^2\theta_{1,2}'$. Решение задачи является суперпозицией квазистационарного решения, удовлетворяющего нулевым граничным условиям, и нестационарного решения, удовлетворяющего ненулевым граничным условиям. Квазистационарное слагаемое $cr^{\pi/\theta_3}\sin\pi\frac{\theta-\theta_2}{\theta_3}$, $\theta_3 = \theta_1 - \theta_2$, как уже говорилось, не имеет особенностей. Поэтому ограничимся рассмотрением нестационарного решения. Коническое нестационарное решение в угловой области является степенным: $w(z,t) = z^\sigma\frac{a_1 + ia_2}{\sin 2\theta_3}$, где $z = x + iy = re^{i\theta}$, $\psi = \operatorname{Im} w$. Из граничных условий находим, что $\sigma = 2$, $a_1 = \theta_1'\cos 2\theta_2 - \theta_2'\cos 2\theta_1$, $a_2 = \theta_2'\sin 2\theta_1 - \theta_1'\sin 2\theta_2$. Следовательно, нестационарное решение имеет вид:

$$\psi_1 = r^2\frac{a_1\sin 2\theta + a_2\cos 2\theta}{\sin 2\theta_3}.$$

Ограниченное при $\theta_3 \to \pi/2$ решение строится аналогично тому, как это сделано в примере 1. Общее решение

$$\psi = cr^{\pi/\theta_3}\sin\pi\frac{\theta-\theta_2}{\theta_3} + r^2\frac{a_1\sin 2\theta + a_2\cos 2\theta}{\sin 2\theta_3}$$

ограничено при $\theta_3 = \theta_3^* = \pi/2$, если $c\sin 2\theta_3 = -2\theta_1'$. Переходя к пределу $\theta_3 \to \pi/2$, получаем:

$$\psi = \frac{1}{\pi}r^2\theta_1'\left[\pi\cos 2(\theta-\theta_2) - 4\ln r\sin 2(\theta-\theta_2) - 4(\theta-\theta_2)\cos 2(\theta-\theta_2)\right].$$

Как и в первом примере, показатель коничности частного слагаемого при $\theta_3 \to \theta_3^*$ стремится к 2 — показателю коничности нестационарного течения.

Решение сингулярно в момент времени, когда $\theta_3 = m\pi/2$, где $m = 0, 1, 2, 3, 4$. Следовательно, не существует конического решения для вращающейся лопасти, как бесконечной в обе стороны ($m = 2$), так и полубесконечной ($m = 0$). Параметр задачи θ_3 зависит от времени, поэтому данную сингулярность можно рассматривать и как временну́ю.

В гидродинамике сжимаемой жидкости парадокс Стернберга – Койтера не возникает, так как скорость течения лимитирована. Перед начавшей вращение из состояния покоя лопастью образуется область сжатия, ограниченная ударной волной, а за лопастью — область разрежения. В дальнейшем может возникнуть сложная картина соударения разрывов.

Пример 3. Рассмотрим течение жидкости в конусе с изменяющимся полууглом раствора $\theta_0(t) < \pi$. Ограничимся случаем безвихревого течения, не обладающего закруткой. Тогда уравнение для сферической функции тока Ψ примет вид:

$$r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta = 0.$$

Покажем, что непрерывное решение задачи о коническом течении в бесконечном конусе с изменяющимся полууглом раствора $\theta_0(t)$ имеет параметрическую особенность, когда $\cos^2 \theta_0 = 1/3$.

Решение $\Psi = r^3 \Phi(\theta, t)$ должно удовлетворять условию непротекания на поверхности конуса: $\Phi(\theta_0, t) = \frac{1}{3} \theta_0' \sin \theta_0$ — и обыкновенному (время t заморожено) дифференциальному уравнению: $\Phi'' - \Phi' \operatorname{ctg} \theta + 6\Phi = 0$. Решение является суперпозицией функций Лежандра первого и второго рода третьего порядка. Функция Лежандра второго рода имеет особенность при $\theta = 0$, поэтому исключается: $\Phi(\theta, t) = C(3\cos^2 \theta - 1)$. Из условия непротекания находим произвольную константу $C = \frac{1}{3} \frac{\theta_0' \sin \theta_0}{3\cos^2 \theta_0 - 1}$. Параметрическая особенность имеет место, когда $\cos^2 \theta_0 = 1/3$, что и требовалось показать.

Замечание. Регулярное решение при $\theta_0 = \theta_0^*$ строится таким же способом, как и в предыдущих примерах. Мы его не выписываем ввиду громоздкости.

Пространственная сингулярность

В случае пространственной сингулярности скорость неограниченно возрастает на некотором локальном многообразии.

Пример 1. Простейшим примером пространственной сингулярности является задача о безотрывном обтекании угловой кромки: поперечная скорость возрастает как $r^{-\alpha}$, где показатель степени $\alpha > 0$ зависит от угла затупления кромки. Такая сингулярность свидетельствует о некорректности математической модели течения.

Пример 2. Стационарное осесимметричное уравнение Навье – Стокса (1.3) в цилиндрической системе координат x, r имеет сингулярное решение:

$$u_x(x,r) = \frac{c - 6\nu x}{R^2} + o(R^{-2}), \quad u_r(x,r) = -\frac{6\nu}{R} + o(R^{-1}),$$

$$p(x,r) = \frac{12\nu^2}{R} + o(R^{-3}),$$

где c и r_0 — константы, $R = r - r_0$. Его физический смысл: поверхностный источник бесконечной интенсивности, расположенный на круговом цилиндре радиуса $r - r_0$. Течение основано на балансе вязких и инерциальных сил.

Пример 3. Рассмотрим классическую схему отрыва потока от острой кромки O, показанную на рис. 4.3*а*. При подходе к точке O по верхней стороне пластины градиент давления стремится к положительной бесконечности. Следовательно, такая схема течения несостоятельна — пограничный слой оторвется от пластины, не достигнув ее вершины; классическая схема отрыва здесь неприменима.

Пример 4. На рис. 4.8 показана схема отрыва от острого угла $\theta = 2\pi - \theta_1 - \theta_2$. При устремлении к вершине клина O вдоль его грани градиент давления может оставаться конечным (он действительно конечен при $\pi/3 \leqslant \theta_0 \leqslant \pi$), но положительным, так как точка O для верхнего потока является точкой торможения. Следовательно, такая схема течения тоже несостоятельна — пограничный слой оторвется от тупого угла, не достигнув его вершины.

Пример 5. На рис. 4.9*а* показан профиль продольной составляющей скорости $u(x,y)$ в трех сечениях $x = \text{const}$ вблизи точки отрыва потока от гладкой поверхности $x = 0$. Условие отрыва потока имеет вид: $\partial u(x_0,0)/\partial y = 0$. Гольдштейном показано (см. Сычев, 1987), что в рамках уравнений пограничного слоя нормальная к стенке составляющая скорости в пределе $x \to -0$ возрастает пропорционально $(-x)^{-1/2}$. Наличие особенности Гольдштейна свидетельствует о том, что решение уравнений пограничного слоя непродолжаемо за точку $x = 0$. В ее окрестности справедливы уравнения Навье – Стокса.

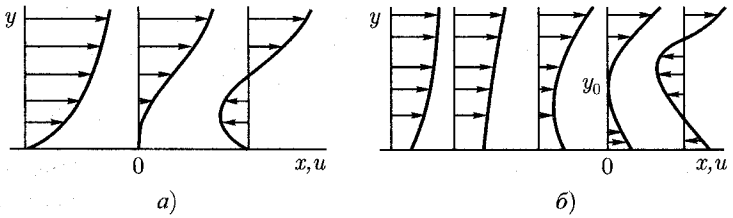


Рис. 4.9. Профили продольной скорости вблизи точки отрыва ($x = 0$) пограничного слоя: *а* — в стационарном течении; *б* — в нестационарном течении

Пример 6. Если пограничный слой расположен над подвижной поверхностью, то особенность «всплывает», то есть располагается не на поверхности тела ($y = 0$), а в некоторой точке $y = y_0 > 0$, как показано на рис. 4.9*б*. В этой точке одновременно обращаются в нуль продольная составляющая скорости u и ее производная $\partial u/\partial y$. Такая особенность называется *особенностью Мура – Ротта – Сирса* (см. Сычев, 1987). Она же возникает при отрыве нестационарного пограничного слоя.

Пример 7. Аналогичная особенность (особенность Тригуба) имеет место в окрестности точки разрушения осесимметричного вихря $x = 0$ в рамках погранслойного приближения: радиальная составляющая скорости ведет себя как $(-x)^{-1/2}$, решение не может быть продолжено за особую точку $x = 0$ (см. Тригуб, Блохин, Симакин, 1994).

Конечновременная сингулярность

В случае конечновременной сингулярности скорость становится бесконечной в некоторый момент времени $t = t_0$. Если область сингулярности сужается, то конечновременная сингулярность называется *коллапсом*.

Конечновременная сингулярность может быть автомодельной, если $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t) = a(\tau)\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$, где $\boldsymbol{r} = \tau^n \boldsymbol{R}$, $\tau = t_0 - t$, и неавтомодельной, если $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t) = \tau^{-n}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r}) + o(\tau^{-n})$. При автомодельном коллапсе особенность может быть точечной, линейной или поверхностной. Неавтомодельная сингулярность появляется во всей области течения.

Вопрос о продолжении решения за точку $t = t_0$ в общем случае остается открытым.

Уравнение Эйлера имеет квадратичную нелинейность, поэтому среди обыкновенных дифференциальных уравнений ближайшим аналогом

к нему будет уравнение $\dfrac{dy(t)}{dt} = y^2$, допускающее сингулярность типа $(t - t_0)^{-1}$. Уравнение Стокса не имеет конечновременной сингулярности.

Пример 1. Известным примером конечновременной сингулярности является так называемое опрокидывание бегущей волны. Рассмотрим одномерную бегущую волну $u(x,t) = f(x - ut)$. Выберем в начальном профиле скорости $u(x,0) = f(x)$ точку перегиба, в которой $f' = f'_{\max} < 0$. Тогда через промежуток времени $t_0 = -1/f'_{\max}$ произойдет опрокидывание волны — образование разрыва.

Пример 2. Тейлор и Грин высказали мысль, что начальное вихревое течение частного вида $u(x,y,z,0) = \cos x \sin y \cos z$, $v(x,y,z,0) = -\sin x \cos y \cos z$, $w(x,y,z,0) = 0$ становится сингулярным за конечное время. Пока не удалось доказать существование сингулярности Тейлора – Грина даже в случае невязкого течения (Фриш, 1998).

Пример 3. Имеются многочисленные примеры численных расчетов появления конечновременной сингулярности в невязком течении. Причиной ее появления является растяжение и опрокидывание вихревых линий (Кузнецов, Рубан, 2000). Конечновременной коллапс может приводить к образованию *вихревых блинов*, толщина которых убывает по закону $(t - t_0)^{3/2}$, а два других размера — по закону $(t - t_0)^{1/2}$.

Окитани и Кишиба (1995) показали, что конечновременная сингулярность в завихренности невязкого течения имеет степенной вид $(t - t_0)^{\alpha}$, где $\alpha = \dfrac{1}{2}$ в случае точечной сингулярности, $\alpha = 1$ в случае линейной сингулярности, $\alpha = \dfrac{3}{2}$ в случае поверхностной сингулярности.

Пример 4. Амплитуда волны в нелинейной фазе неустойчивого течения в пограничном слое (Жигулёв, 1980) растет при $t \to t_0$ по степенному закону $(t_0 - t)^{-2}$.

Образование и эволюция излома тангенциального разрыва скорости

Хотя проблема появления геометрической сингулярности — угловой особенности в форме первоначально гладкой границы вихревой области — выделена в отдельное рассмотрение, она может отождествляться с появлением параметрической или конечновременной сингулярностей. При этом теряется гладкость решения, форма тангенциального разрыва становится клиновидной в окрестности особой точки. Угол раствора кли-

на может быть равен $\pi/2$, $\pi/3$ и π. Считается, что угловая особенность трансформируется в спиральный вихрь.

Пример 1. Рассмотрим эволюцию тангенциального разрыва скорости, имеющего в начальный момент времени $t = 0$ форму бесконечного клина. Такая плоская задача в частном случае эволюции свободной границы была поставлена Р. Д. Рихтмайером, однако решение он предложил искать в виде гладкой функции. Как показали численные расчеты, гладкого решения нет — клиновидная особенность трансформируется в спираль (см. Бетяев, Гайфуллин, 2001).

Пример 2. Из теории волн известно, что при малом отношении амплитуды волны к длине волны $\sigma \ll 1$ гравитационные волны на воде синусоидальны. Первым, кто исследовал волны конечной амплитуды, был Дж. Стокс (Уизем, 1977). Волна Стокса существенно отличается от синусоидальных волн. При некотором критическом значении параметра $\sigma = \sigma^*$ волна заостряется, пики гребней становятся зубцами, угол при вершине зубца составляет $2\pi/3$.

Решение задачи о периодической волне при $\sigma > \sigma^*$ неизвестно. В реальных условиях заострения превращаются в спиральные «барашки».

Пример 3. Открытым остается вопрос о *сингулярности Мура* — образовании бесконечной кривизны в некоторой точке плоской вихревой пелены за конечное время ее эволюции (Фриш, 1998; Сэффмен, 2000).

Пример 4. С помощью численных расчетов эволюции замкнутых тангенциальных разрывов скорости обнаружено, что вместе с возникновением точки заострения возникает выходящий из нее *филамент* — конечный отрезок тангенциального разрыва скорости (Сэффмен, 2000). Такой процесс называется *филаментацией*. По-видимому, свободный конец филамента должен сворачиваться в спираль.

4.5. Теория крыла

Мы восхищаемся полетом НЛО (неопознанных летательных объектов), но не можем, исходя из первых принципов физики, предсказать аэродинамические свойства ОЛО (опознанных летательных объектов).

Аэродинамика крыла — главнейший для технических приложений раздел гидродинамики — основана на эксперименте и теории крыла, тогда как *теория крыла* основана на асимптотических методах. Для их применения нужен малый параметр. В теории крыла малый параметр искать не приходится — он всегда есть. Это — характерная толщина пограничного слоя $\mathrm{Re}^{1/2} \ll 1$, где $\mathrm{Re} = u_\infty l/\nu$ — число Рейнольдса. Здесь:

u_∞ — скорость набегающего невозмущенного потока, l — характерный размер крыла, ν — коэффициент кинематической вязкости. В авиации параметр $\mathrm{Re}^{-1/2}$ достигает значений $10^{-4} \div 10^{-3}$. Только предположение о малости числа $\mathrm{Re}^{-1/2}$ формально позволяет сделать первый шаг на пути к математическому моделированию задачи, а именно — к использованию асимптотической по своему содержанию субпарадигмы Прандтля о невязком характере течения в масштабах хорды или размаха крыла.

Таким способом обходится первая трудность — расчет турбулентного течения, занимающего бóльшую часть поверхности крыла. Влияние вязкости — и турбулентности! — оказывается локализованным в прилегающих к крылу пограничных слоях и в отходящих от него слоях смешения.

Но как быть со второй трудностью — расчетом отрыва потока? В соответствии с субпарадигмой Гельмгольца слои смешения при $\mathrm{Re} \to \infty$ трансформируются в поверхности разрыва тангенциальной составляющей скорости: вихревые пелены или свободные границы. Однако при таком подходе построить безэмпирическую математическую модель обтекания крыла не удается, поскольку не известно положение линии отрыва потока от гладкой поверхности, а пренебрежение таким отрывом не всегда корректно. Поэтому по большому счету теорию крыла следует считать полуэмпирической теорией.

В общем случае в рамках парадигмы Прандтля оба решения взаимосвязаны: нельзя сначала получить одно решение, затем — другое. Поэтому разделение задачи на внешнюю, *невязкую*, и внутреннюю, *вязкую*, не приводит к строгому решению задачи. Такое разделение допустимо, если линия отрыва потока фиксирована. *Естественная* фиксация линии отрыва, в соответствии с условием Кутты, происходит на острых и угловых кромках крыла. *Искусственно* зафиксировать линию отрыва от гладкой поверхности крыла можно с помощью так называемых вихрегенераторов, инициирующих глобальный отрыв — отходящие от крыла поверхности разрыва тангенциальной составляющей скорости.

Таким образом, внешняя задача теории крыла заключается в построении вихревой системы крыла, которая состоит из свободных поверхностей или вихревых пелен.

Основоположником теории крыла является английский аэродинамик Ф. Ланчестер (1868–1946). В 1894 году Ф. Ланчестер, опираясь на проведенные им опыты и на наблюдения за полетом птиц, предложил схему обтекания крыла и показал, что даже в невязкой жидкости крыло испытывает сопротивление. На рис. 4.10 воспроизведена принадлежащая

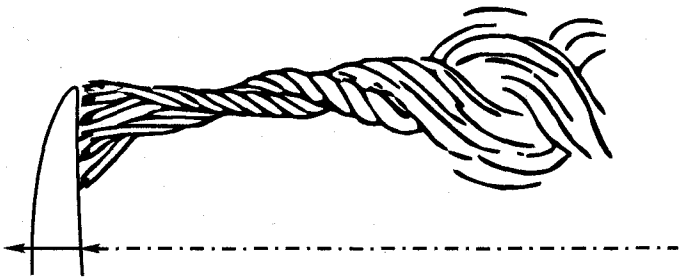


Рис. 4.10. Факсимильный рисунок Ланчестера

Ланчестеру схема схода вихря с конца крыла. Он первым понял механизм превращения *присоединенного* к крылу вихря в сходящие с его концов и снижающиеся к земле *свободные* вихри[1]. Это были преждевременные роды теории крыла, возраст которой сегодня превысил 100 лет. Уже в 1902 году В. М. Кутта построил пример безотрывного плоского обтекания дужки. Условие о безотрывном обтекании острой кромки крыла названо его именем. В 1906 году Н. Е. Жуковский вывел теорему о пропорциональности подъёмной силы и циркуляции, названную его именем.

Вдохновленный их работами, Ланчестер в 1907 и 1908 годах публикует две книги «Аэродинамика» и «Аэродонетика», в которых развивает теорию циркуляции полета. В 1908–1909 годах экспансивный англичанин часто приезжал в Геттинген для бесед с Прандтлем. Если Ланчестер был генератором идей, то Прандль был их оформителем. То, что у Ланчестера выглядело интуитивным и расплывчатым, у Прандтля превращалось в стройную систему, поддающуюся математической обработке.

Вопрос об обтекании угловой кромки приобретает в теории крыла принципиальное значение. Как уже говорилось, задача об обтекании кромки вязким потоком не только не решена, но и неизвестны способы её решения (Ван-Дайк, 1967).

[1]В 1897 году Ланчестер направил в Лондонское Королевское общество статью о механизме действующих на крыло сил, которая была отвергнута как ненаучная. И для этого были основания. Не будучи профессиональным гидродинамиком, он употреблял непривычные для ученых термины: «вихревое движение» именовал «периптеральным движением», а сам вихрь называл «возбужденной волной». Уязвленный непризнанием коллег, Ланчестер временно прекращает занятия гидродинамикой, работает инженером-автомобилестроителем, изобретает стартер для пуска двигателя, организует собственную автомобильную компанию. Он внес большой вклад в некоторые разделы прикладной математики, имеет много изобретений в различных областях техники.

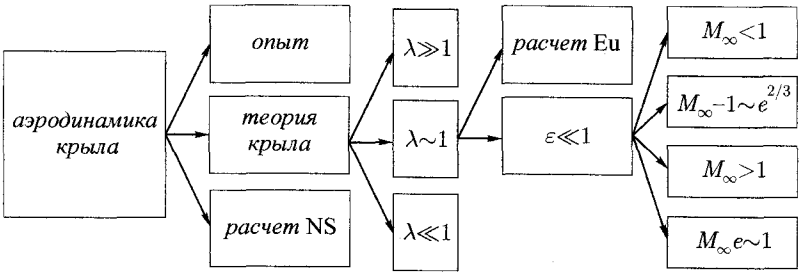


Рис. 4.11. Классификация течений в аэродинамике крыла

Определять дозвуковое и сверхзвуковое течения можно по-разному: либо по знаку $M_\infty - 1$, либо по знаку $M_{\max} - 1$, где $M_{\max}$ — максимальное значение числа Маха в потоке. В асимптотической теории крыла, кроме M_∞ и $\mathrm{Re}^{-1/2}$, имеется ещё один безразмерный малый параметр ε, характеризующий геометрическое отклонение потока от однородного плоскопараллельного. В качестве ε выбирается угол атаки либо угол наклона поверхности крыла к набегающему потоку. Наличие этого малого параметра ($\varepsilon \ll 1$) приводит к более детальной классификации течений (рис. 4.11):

- $0 \leqslant M_\infty < 1$ — дозвуковая линейная теория, справедливо уравнение Лапласа для потенциала скорости;
- $M_\infty = 1 + O(\varepsilon^{2/3})$ — трансзвуковая нелинейная теория;
- $M_\infty > 1$ — сверхзвуковая линейная теория, справедливо волновое уравнение;
- $M_\infty \varepsilon = O(1)$ — гиперзвуковая нелинейная теория.

Геометрический параметр λ характеризует удлинение крыла, то есть отношение его размаха к хорде. В зависимости от порядкового значения λ асимптотическая теория крыла делится на 3 раздела: теория крыла большого удлинения ($\lambda \gg 1$), включающая теорию профиля ($\lambda = \infty$), теория крыла конечного удлинения ($\lambda \approx 1$), теория крыла малого удлинения ($\lambda \ll 1$).

Крыло большого удлинения

В 1918 году Л. Прандтль создал *феноменологическую теорию* крыла большого удлинения. Циркуляция Γ вокруг крыла большого удлине-

ния определяется из выведенного им эвристическим путем интегродифференциального уравнения:

$$\Gamma(z) = -2\pi u_\infty \frac{l}{\lambda}\frac{b(z)}{b_{\max}}\left[\alpha - \frac{1}{4\pi u_\infty}\int\limits_{-l}^{l}\frac{d\Gamma(\zeta)}{d\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta - z}\right],$$

где $2l$ — длина крыла, b — хорда, ось z направлена по размаху.

Основы *асимптотической теории* крыла большого удлинения заложены в 1953 году К. О. Фридрихсом (см. Ван-Дайк, 1967). Сразу же выяснилось, что первый член в правой части уравнения имеет порядок α/λ, однако интегральный член, как легко увидеть, пропорционален α/λ^2 и является внепорядковым. Таким образом, уравнение Прандтля содержит члены второго приближения. Это было бы совсем не страшно, если бы не усложняло задачу. Асимптотическая теория крыла большого удлинения свободна от этого недостатка и позволяет получить не только первый член разложения подъёмной силы прямоугольного крыла по обратным степеням удлинения, но и последующие. Внутреннее разложение, справедливое в масштабе $O(b_{\max})$, в соответствии с законом плоских сечений, описывает обтекание профиля крыла.

Установившееся безвихревое и безотрывное обтекание профиля невязкой несжимаемой жидкостью — самая простая математическая модель обтекания. Такая задача сводится к определению комплексного потенциала скорости, являющегося аналитической функцией комплексной переменной $z = x + iy$. Внешность профиля конформно отображается на внешность окружности, а решение задачи об обтекании окружности выписывается сразу же в виде суперпозиции однородного потока, точечного вихря и диполя. Циркуляция вихря определяется из условия Кутта, а интенсивность диполя — из условия непротекания на окружности.

Влияние формы профиля на решение наиболее явно выявляется в рамках линейной теории. В этом случае толщина, изгиб профиля и угол атаки считаются малыми независимыми параметрами. С помощью простого растяжения координат линейное уравнение сводится к уравнению Лапласа, а задача о дозвуковом обтекании крыла сжимаемой жидкостью — к задаче об обтекании крыла несжимаемой жидкостью ($M_\infty = 0$). Условие непротекания на профиле определяет значение вертикальной составляющей скорости на отрезке $|x| \leqslant b$, $y = 0$. Разнообразные краевые задачи линейной теории профиля решаются с помощью интегралов типа Коши. Ключевой является *задача Римана* для разомкнутого контура:

определить функцию $\Phi(z)$ аналитическую на всей плоскости, кроме точек отрезка $|x| \leqslant b$, $y = 0$, граничные значения $\Phi^+(\xi)$, $\Phi^-(\xi)$ которой при приближении к отрезку сверху и снизу суть интегрируемые функции, удовлетворяющие краевому условию:

$$\Phi^+(\zeta) = G(\zeta)\Phi^-(\zeta) + g(\zeta),$$

где $G(\zeta)$ и $g(\zeta)$ удовлетворяют условию Гёльдера, причем всюду $G(\zeta) \neq 0$.

Возможна постановка обратной задачи: по значениям потенциала сверху и снизу отрезка $|x| \leqslant b$, $y = 0$, найти изгиб и толщину профиля. Эта краевая задача также сводится к римановой.

Во внешнем разложении, справедливом в масштабе $O(l)$, вихревая система состоит из заменяющей крыло вихревой нити и отходящего от неё следа в виде плоской вихревой пелены.

У глиссирующего крыла нижняя поверхность смочена, верхняя — нет. Условие Кутты выполняется на обеих кромках. Внутреннее решение задачи об обтекании глиссирующего крыла большого удлинения обладает интересной особенностью — логарифмически бесконечным отстоянием свободной поверхности от ординара вдали от крыла.

О сверхзвуковом крыле конечного удлинения говорить не приходится, ибо вне концевых конусов Маха течение не зависит от удлинения. Поэтому аэродинамика крыла большого удлинения разработана только для дозвукового и звукового потоков.

Крыло малого удлинения

Малое удлинение имеют не только крылья, но и ракеты и другие удлиненные конфигурации: как изолированные тела, так и комбинации крыла с фюзеляжем. Поэтому теория тонкого (удлиненного в направлении потока) тела является обобщением теории крыла малого удлинения. Она была упрощена и формализована, когда получили развитие асимптотические методы, в частности и в особенности, метод сращиваемых асимптотических разложений.

Теорию тонкого тела, являющуюся обобщением теории крыла малого удлинения, впервые использовал М. Мунк в 1924 году для аэродинамического расчёта дирижабля. Т. Карман в 1935 году и Цянь Сюэ-сень в 1938 году распространили теорию Мунка на диапазон сверхзвуковых скоростей полёта. В дальнейшем она использовалась при расчёте аэро-

динамических характеристик различных по форме тел, крыльев и их комбинаций многими авторами, из которых следует отметить Р. Джонса, применившего теорию к случаю отрывных течений, включающих вихревые пелены, а также Дж. Уорда, уточнившего метод расчёта тел, помещенных в сверхзвуковой поток.

Однако ни в одном разделе гидродинамики нет такой путаницы, как в теории тонкого тела. Бытующие недоразумения связаны с тем, что теория тонкого тела двуедина, содержит две различные аналогии с плоским течением: стационарную и нестационарную (Бетяев, 1993). Асимптотическая теория крыла базируется на *законе плоских сечений*, имеющих универсальное общее теоретическое значение. Если область вытянута по оси x и её удлинение λ мало, то во внутренней области, где $y, z = O(\lambda l)$, $x = O(l)$, справедливы оценки:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\right| = O\left(\frac{1}{l}\right), \quad \left[\frac{\partial}{\partial y}\right] \sim \left|\frac{\partial}{\partial z} = O\left(\frac{1}{\lambda l}\right)\right|.$$

Следовательно, в первом приближении производная $\partial/\partial x$ мала по сравнению с $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$. Аналогичные оценки справедливы и для старших производных. Ежели исходные уравнения симметричны относительно переменных x, y, z, как, например, уравнения Лапласа, Максвелла, Стокса, то в первом приближении продольные производные из них исчезают. Действует закон плоских сечений: уравнения в плоскости $x = \mathrm{const}$ становятся двумерными, замороженная координата x отмечает лишь выбранное сечение. Такова суть закона плоских сечений — основы теории тонкого тела.

В уравнение Эйлера, как и в уравнение Навье – Стокса, производная по x входит нелинейным образом в инерциальный член:

$$\frac{d}{dt} = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z},$$

где u, v, w — составляющие скорости по декартовым осям x, y, z.

В классической постановке, когда справедливы разложения:

$$u(x, y, z, \lambda) = u_\infty + \lambda^2 U(x, \eta, \xi) + o(\lambda^2),$$
$$v(x, y, z, \lambda) = \lambda V(x, \eta, \xi) + o(\lambda),$$
$$w(x, y, z, \lambda) = \lambda W(x, \eta, \xi) + o(\lambda), \quad y = \lambda\eta, \quad z = \lambda\xi,$$

а координата x становится временноподобной:

$$\frac{d}{dt} \approx \frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial \eta} + W\frac{\partial}{\partial \xi}, \quad x = u_\infty t,$$

действует аналогия между стационарным трёхмерным и нестационарным плоским течениями, охватывающая дозвуковые, сверхзвуковые и гиперзвуковые режимы.

Стационарная аналогия справедлива для тонких тел, установленных под конечным[1] углом атаки $\alpha = O(1)$. Различные сечения крыла обтекаются независимо друг от друга, как и в теории крыла большого удлинения. Отсутствует память о течении в соседних сечениях. В тривиальном случае обтекания цилиндрического тела получается скользящее течение, закон плоских сечений является точным, составляющая скорости вдоль оси тела строго постоянна. В случае обтекания нецилиндрического тела этот закон является приближённым, составляющая скорости вдоль оси тела постоянна лишь приближенно.

Если бы возникала задача о создании хорошо обтекаемого[2], то есть безотрывного, корпуса ракеты или самолета, то, в соответствии с законом плоских сечений, его геометрию следовало бы выбирать среди симметричных каплевидных в сечении форм с «верхней» острой кромкой, как показано на рис. 4.12. Ввиду наличия острой верхней кромки поперечное течение приобретет устойчивость.

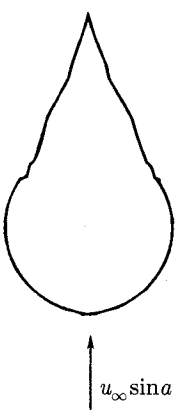


Рис. 4.12. Поперечное сечение «хорошо обтекаемого тела»

[1]Углы атаки $\alpha \approx \pi/2$ достигаются современным истребителем Су-27 в нестационарном полёте при исполнении фигуры высшего пилотажа «кобра».

[2]В XX веке хорошо обтекаемую форму приняли самолёты, ракеты, надводные и подводные суда, автомобили, экипировка спортсменов и даже коньки.

При $\alpha = O(\lambda) \ll 1$ образованные в носовой части тела вихревые пелены остаются вблизи него, справедлива введённая выше нестационарная аналогия. Для наблюдателя, движущегося вдоль оси x от вершины тела $x = 0$ со скоростью u_∞, выполняется закон плоских сечений. Справедлива задача с начальными данными, малые возмущения против потока не распространяются. Течение жидкости во внутренней области оказывается несжимаемым при $M_\infty < \infty$ и сжимаемым при гиперзвуковом обтекании.

В дозвуковой и сверхзвуковой теориях тонкого тела строится два асимптотических разложения: одно — во внешней области, где течение невязкое, все характерные размеры равны по порядку величины длине тела l, и другое — во внутренней области, где течение тоже невязкое, поперечные размеры порядка λl, а продольный размер порядка l. Во внутренней области крыла малого удлинения существенно взаимодействие сходящих с боковых кромок отрывов. Кроме этого, имеется третья зона — прилегающий к поверхности вязкий пограничный слой, толщина которого много меньше λl. В рамках нестационарной аналогии пограничный слой трёхмерный, продольное течение безградиентно. В рамках стационарной аналогии пограничный слой двумерный, продольное и поперечное течения разделимы.

Необычайно широк спектр приложений теории тонкого тела: глиссирование удлиненной поверхности, движение удлиненного судна, плавание рыб, внутреннее течение жидкости в каналах и кровеносных сосудах, эволюция колоннообразных вихрей, миграция продолговатых частиц в потоке.

На большом удалении от тонкого тела произвольной формы течение в главном приближении оказывается осесимметричным, поэтому там реальную комбинацию крыло–корпус можно заменить *эквивалентным телом вращения*, имеющим такое же распределение площади поперечного сечения, какое имеет исходная комбинация. Сопротивление же тела вращения вычислить гораздо проще.

Большое значение в аэродинамическом проектировании имеет *правило площадей*: при заданной подъемной силе сопротивление комбинации крыло–корпус зависит лишь от распределения площади сечения эквивалентного тела вращения. Дозвуковое и сверхзвуковое правила площадей были установлены М. Дж. Лайтхиллом в 1948 году. В дозвуковом потоке сечение выбирается поперечным, а в сверхзвуковом потоке сечение отсекается плоскостями Маха и проецируется на плоскость поперечного сечения. Трансзвуковое правило площадей установили Дж. Коул и А. Ф. Месситор в 1957 году. В соответствии с этим правилом сопро-

тивление заостренных тел и крыльев с острыми передними и задними кромками не зависит от числа M_∞.

Крыло конечного удлинения

В теории крыла конечного удлинения эффективно используются линеаризация и численный расчет уравнений Эйлера. Известно 3 линейных теории крыла, которым соответствуют первые члены разложения по малым параметрам: максимальной относительной толщине крыла, максимальному относительному изгибу крыла, углу атаки. В случае сверхзвукового обтекания получено решение волнового уравнения в замкнутом виде для крыла достаточно произвольной формы в плане, в случае дозвукового обтекания — лишь для некоторых форм в плане (см. Бетяев, 1993). Имеются стандартные программы численного решения линейной задачи об обтекании произвольного крыла как сверхзвуковым, так и дозвуковым потоками. В соответствии с линейными теориями коэффициент подъёмной силы крыла заданной формы пропорционален α:

$$c_y \approx c_0 + \alpha c_1.$$

Каков следующий член разложения? По аналогии с рядом Тейлора он должен иметь порядок $O(\alpha^2)$. Ан, нет! На примере обтекания прямоугольного крыла Г. К. Ченгом (1955) показано, что этот член равен $O(\alpha^{5/3})$. Именно такое — нелинейное! — влияние оказывает одинарный спиральный отрыв с боковых кромок крыла в случае малых углов атаки, эволюция которого определяется в рамках нестационарной аналогии с плоским течением.

Когда параметры ε и λ конечны, теория бессильна и уступает своё место численному расчету. Однако даже в рамках математической модели невязкой жидкости имеются принципиальные трудности на пути решения задачи. Дело заключается в том, что схема течения с одинарным отрывом от острой кромки, как уже отмечалось, некорректна.

Еще более сложным феноменом является так называемый *смерчевидный отрыв* потока от гладкой поверхности крыла. В таком вихре струйки тока отходят от крыла по пространственным спиральным линиям.

Асимптотическая теория крыла, возвышающаяся на трёх китах: контурной динамике, асимптотических методах и краевых задачах теории аналитических функций, — перешагнула через вековой рубеж. Однако строгий читатель заметит, что само название — *теория* — претенциозно,

ибо она ещё не способна потеснить с первого места аэродинамический эксперимент.

4.6. Расслоение ламинарных течений

Как уже отмечалось, в гидродинамике известны многочисленные случаи, когда с уменьшением интенсивности какого-либо эффекта его влияние исчезает не равномерно по всему пространству, а сосредоточивается в некотором слое. Знакомый пример — пограничный слой Прандтля. Для решения таких задач приспособлен метод сращиваемых асимптотик.

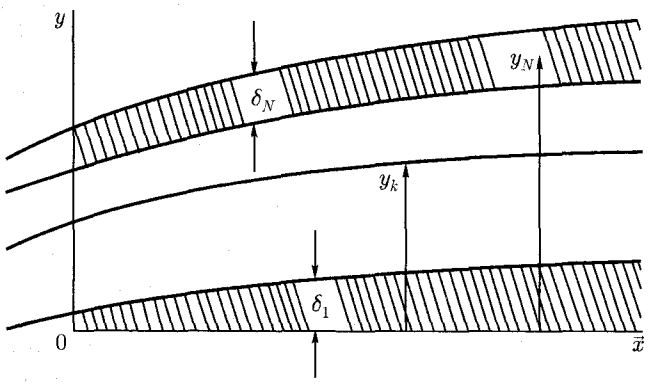


Рис. 4.13. Условная схема асимптотического расслоения основного слоя: 1 — нижний (пристеночный) слой; k — мезослой; N — суперслой

Рассмотрим некоторый слой толщиной δ (рис. 4.13): $0 \leqslant y/\delta$. По отношению к нему, как к основному слою, будем различать: надслой (суперслой), внутренние слои и пристеночный слой. Толщину k-го слоя обозначим как δ_k. Суперслоем называется заштрихованный на рис. 4.13 слой N, расположенный от стенки на расстоянии $y_N = O(\delta) \gg \delta_N$. Внутренним слоем называется слой k, расположенный от стенки на расстоянии $y_k = O(\delta_k)$. Пристеночным слоем называется тоже заштрихованный и примыкающий к стенке слой 1 толщиной $\delta_1 = o(\delta)$.

Многочисленны и необозримы примеры асимптотического расслоения течений. Обратимся лишь к некоторым из них.

Непрерывный отсос пограничного слоя

Пусть плоский стационарный ламинарный поток несжимаемой жидкости обтекает со скоростью u_∞ решетку щелей, размещенную в плоскости $y = 0$. В камере отсоса ($y < 0$) жидкость не имеет собственного движения.

Внешнее течение, соотнесенное с масштабом l, примем безвихревым и невязким: $\delta^{-2} = \mathrm{Re} = u_\infty l/\nu \gg 1$, где ν — коэффициент кинематической вязкости. Внутреннее течение, соотнесенное с периодом решетки τl, характеризуется числом $\mathrm{Re}_1 = \tau\,\mathrm{Re}$.

Наличие отсоса усложняет течение, что приводит к его расслоению. Априори ясно, что в рассматриваемом случае число зон может доходить до трех: зона невязкого течения, основной пограничный слой, зона отсоса. Чтобы получить более строгие выводы, применим инспекционный анализ к уравнению переноса завихренности $-\Delta\psi$ (ψ — функция тока, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$):

$$\langle \Delta\psi, \psi \rangle = \delta^2 \Delta^2 \psi,$$

где оператор в левой части уравнения — скобка Пуассона. В качестве базовых параметров выбраны l и u_∞, ось x направлена вдоль решетки щелей, а ось y — по нормали к ней.

Пусть порядковая величина скорости отсоса равна $v(x, y) = -\partial\psi/\partial x = \varepsilon v_0(x) = O(\varepsilon)$. Задача содержит 4 определяющих параметра, из которых 3 являются малыми: δ, τ и ε. Четвертый параметр — коэффициент проницаемости решетки μ — будем считать конечным: $\mu = 1 - \alpha/l = O(1)$, где $\tau(l-\alpha)$ — длина непроницаемого участка в периоде решетки.

Введем некоторые определения. Основным пограничным слоем (слоем 1) будем называть пограничный слой, расположенный над решеткой. Здесь справедливо обычное разложение: $\psi(x, y) = \delta\psi_1(x, y_1) + o(\delta)$, $y = \delta y_1$. Нижний индекс отнесен к номеру зоны.

Локальной областью (слой 2) будем называть пристеночную область с продольным размером $O(\tau)$. Для описания течения в этой области введем «быструю» переменную $\xi = (x - m\tau)\tau^{-1}$, где m — номер щели ($m = 1, 2, 3 \ldots$).

В зависимости от перепада давления на решетке щелей будем различать следующие характерные режимы течения: слабый отсос ($\varepsilon \ll \delta$), умеренный отсос ($\varepsilon = \delta$) и сильный отсос ($\varepsilon \gg \delta$).

В случае умеренного отсоса течение существенно зависит от периода решетки, точнее говоря — от соотношения параметров δ и τ. Различимы три подслучая.

1. На редкой решетке щелей ($\tau \gg \delta$) имеет место режим слива пограничного слоя: истечение из щели невязкое, весь основной пограничный слой сливается в камеру отсоса. На твердых границах решетки образуется локальный пограничный слой толщиной $O(\delta\tau^{1/2})$.

2. На решетке умеренной частоты ($\delta^{3/2} \ll \tau \ll \delta$) отсасывается лишь часть основного пограничного слоя. Истечение через щель невязкое, но завихренное. На твердых границах решетки образуется локальный пограничный слой толщиной $O(\delta^{3/2})$.

3. На частой решетке щелей ($\tau \ll \delta^{3/2}$) имеет место режим ползущего истечения, локального пограничного слоя нет.

Случай слабого отсоса ($\varepsilon \ll \delta$) аналогичен случаю 3: на дне основного пограничного слоя ($y = 0$) ставится условие непротекания, а отсос учитывается как линейный добавок к первому приближению.

В случае сильного отсоса ($\varepsilon \gg \delta$) реализуется режим сдува основного пограничного слоя 1; течение в локальной зоне 2 невязкое, пока $\tau \gg \delta^2$.

Дискретный отсос пограничного слоя

Асимптотическая структура пограничного слоя с отсосом через единичную щель. Рассмотрим обтекание щели шириной sl, расположенной на дне пограничного слоя. Скорость отсоса по-прежнему будем считать равной $O(\varepsilon)$, а внешний поток — незавихренным.

Задача содержит три малых безразмерных параметра: δ, s, ε. Свяжем их степенной зависимостью: $s = O(\delta^n)$, $\varepsilon = O(\delta^k)$, где $0 \leqslant n \leqslant 2$, $k > 0$. Такая связь формально сокращает число параметров на 1: вместо трех малых параметров δ, s, ε остается два конечных параметра k и n. Расход жидкости через щель равен $O(\delta^{k+n})$. Прежде чем определять тип течения в каждом из характерных многоугольников kn-диаграммы (рис. 4.14), введем некоторые определения.

В основном пограничном слое 1 справедливо обычное разложение:

$$\psi(x, y; \delta) = \delta\psi_0(x, Y) + o(\delta), \quad y = \delta Y.$$

Локальной областью будем называть пристеночную область с размером $O(\delta^n) \times O(\delta^n)$, то есть зону, где $\xi = x\delta^{-n} = O(1)$, $\eta = y\delta^{-n} = O(1)$. В такой «квадратной» области справедливы либо уравнения Эйлера, либо Стокса, а при определенном (граничном) значении параметров k и n — уравнения Навье – Стокса.

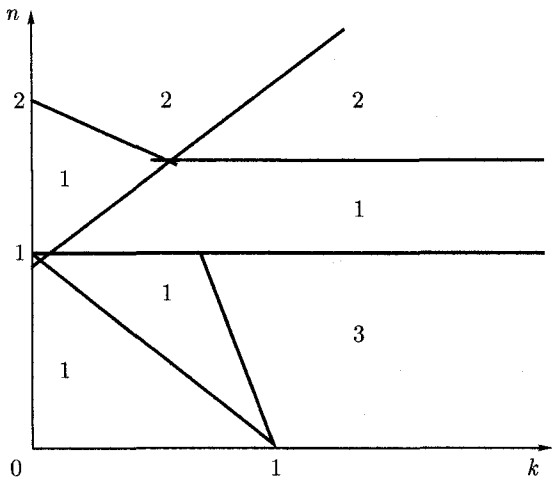


Рис. 4.14. kn-диаграмма режимов отсоса жидкости через единичную щель

Локальный пограничный слой существует при $\xi = O(1)$ и $y_1 = y/\delta_1 = O(1)$, где δ_1 — его условная толщина.

Толщина локальной зоны $O(\delta^n)$ больше толщины основного пограничного слоя $O(\delta)$ при $n < 1$. Если отсасывается весь основной пограничный слой, что возможно при $n < 1$, то продольная скорость конечна, первый член асимптотического разложения функции тока равен $O(\delta^n)$.

Оценим по порядку величин слагаемые в локальном асимптотическом разложении функции тока при $\eta = O(1)$. Постоянной скорости соответствует член порядка $O(\delta^n)$, трению (постоянной завихренности) — $O(\delta^{2n-1})$, отсосу — $O(\delta^{k+n})$. В зависимости от соотношения между этими эффектами получаются различные математические модели и параметрические области их существования в kn-плоскости, а также определяется последовательность расположения членов локального асимптотического разложения функции ψ. На рис. 4.14 введены следующие обозначения. В области 1 течение невязкое: завихренное или незавихренное, симметричное или несимметричное. В области 2 — ползущее течение. В области 3 отсос настолько мал, что перетеканием можно пренебречь по сравнению с эжекцией покоящейся в камере отсоса жидкости.

Еще раз об отрыве пограничного слоя от гладкой поверхности

Теория отрыва идеальной жидкости от гладкой поверхности неоднозначна. Она допускает однопараметрический произвол в определении положения точки отрыва O (рис. 4.3*б*). М. Бриллюэн (1911) и Г. Вилля (1914) предложили выбирать положение точки отрыва из условия конечности градиента давления при подходе к точке O слева вдоль твердой границы. В этом случае кривизна K линии тангенциального разрыва скорости $y = f$ в точке отрыва, как и градиент давления, будут нулевыми. Но тогда возникает парадокс: отсутствует причина появления отрыва — положительный градиент давления.

Такой дискрепанс был разрешен В. В. Сычевым (1972), предположившим, что кривизна K зависит от числа Рейнольдса Re и $K(\mathrm{Re}) \to 0$ при $\mathrm{Re} \to \infty$, то есть в предельном переходе к невязкому течению справедливо условие Бриллюэна – Вилля.

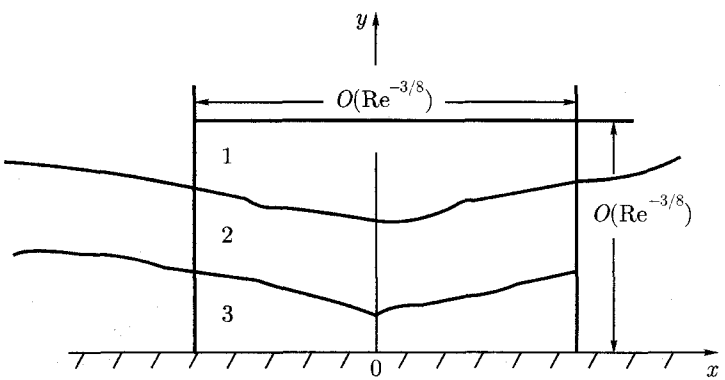


Рис. 4.15. Асимптотическая структура течения в окрестности точки отрыва

В окрестности точки отрыва была обнаружена трехслойная структура течения, показанная на рис. 4.15, где 3 — вязкий подслой толщиной $O(\mathrm{Re}^{-5/8})$, обеспечивающий выполнение условия прилипания, 2 — невязкий слой толщиной $O(\mathrm{Re}^{-1/2})$, являющийся продолжением пограничного слоя, 1 — внешняя область потенциального течения толщиной $O(\mathrm{Re}^{-3/8})$, подверженная вытесняющему действию вязкого под-

слоя 3. Давление, как и искривление линий тока, насквозь пронизывают зону 2. Положительный градиент давления в окрестности точки отрыва не является заданным, как в пограничном слое, а самоиндуцируется в результате взаимодействия пограничного слоя с внешним потенциальным потоком.

В заотрывной области формируется возвратное течение и слой смешения, образующий в приближении невязкого течения свободную границу.

Колоннообразный вихрь

Рассмотрим *осесимметричный стационарный колоннообразный* вихрь с осью x. Отнесем линейные размеры к характерной длине l, составляющие скорости — к скорости спутного потока u_∞, давление — к u_∞^2. Тогда уравнения Навье–Стокса (1.3) примут вид:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial (ru_r)}{\partial r}=0,\quad \frac{du_x}{dt}+\frac{\partial p}{\partial x}=\delta^2\nabla^2 u_x,$$
$$\frac{du_r}{dt}-\frac{\Gamma^2}{r^3}+\frac{\partial p}{\partial r}=\delta^2\left(\nabla^2 u_r-\frac{u_r}{r^2}\right),\quad \frac{d\Gamma}{dt}=\delta^2\left(\nabla^2\Gamma-\frac{2}{r}\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right), \qquad (4.22)$$

где $\dfrac{d}{dt}=\dfrac{\partial}{\partial t}+u_x\dfrac{\partial}{\partial x}+u_r\dfrac{\partial}{\partial r}$, $\Gamma=ru_\theta$, $\delta^2=\dfrac{\nu}{lu_\infty}$, $\nabla^2=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Обратное число Рейнольдса будем считать малым: $\delta^2\ll 1$. Наряду с параметром δ задача содержит ещё один параметр — полную циркуляцию вихря $\Gamma_0=\Gamma(x,r\to\infty)=\text{const}$. Теория тонкого слоя применима, если оба параметра считать малыми: $\Gamma_0=O(\delta)\ll 1$ (в случае $\Gamma_0\ll\delta$ задача разделяется на две — вращение не оказывает влияния на движение в меридиональной плоскости).

При $\Gamma_0=O(\delta)$ имеем:

$$r=\delta r_1,\quad u_x=u_1(x,r_1)+o(1),\quad u_r=\delta v_1(x,r_1)+o(\delta),$$
$$\Gamma=\delta\Gamma_1(x,r_1)+o(\delta),\quad p=p_1(x,r_1)+o(\delta). \qquad (4.23)$$

Из системы (4.22) следует приближение пограничного слоя:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{1}{r_1}\frac{\partial (r_1v_1)}{\partial r_1}=0,\quad \frac{du_1}{dt}+\frac{\partial p_1}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1\frac{\partial u_1}{\partial r_1}\right),$$
$$\frac{\partial p_1}{\partial r_1}=\frac{\Gamma_1^2}{r_1^3},\quad \frac{d\Gamma_1}{dt}=r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial\Gamma_1}{\partial r_1}\right). \qquad (4.24)$$

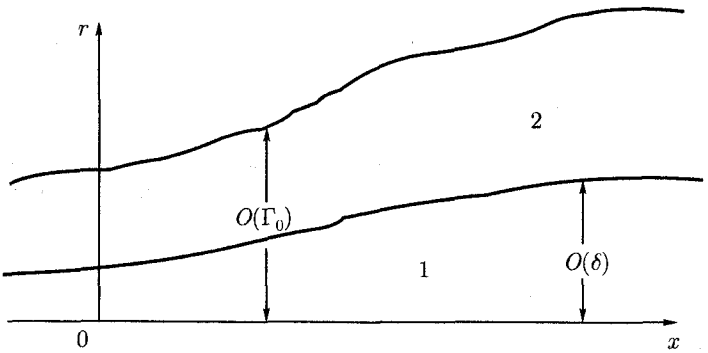


Рис. 4.16. Двухзонная структура колоннообразного вихря: 1 — ядро вихря; 2 — внешняя зона

При $\Gamma_0 \gg \delta$ в δ-слое справедливо разложение (4.23) и уравнения (4.24). Циркуляция скорости в этом слое не набирает своего предельного значения Γ_0, поэтому необходимо ввести в рассмотрение внешнюю зону вихря 2 (рис. 4.16), где справедливы оценки:

$$u_x = u_2(x, r_2) + o(1), \quad u_r = \Gamma_0 v_2(x, r_2) + o(\Gamma_0),$$
$$\Gamma = \Gamma_2(x, r_2) + o(1), \quad p = p_2(x, r_2) + o(1), \quad r_2 = \frac{r}{\Gamma_0} = O(1).$$

Уравнения вытекают из (4.22):

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{r_2}\frac{\partial (r_2 v_2)}{\partial r_2} = 0, \quad \frac{du_2}{dt} + \frac{\partial p_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial r_2} = \frac{\Gamma_2^2}{r_2^3}, \quad \frac{d\Gamma_2}{dt} = 0.$$

Циркуляция скорости сохраняет своё начальное значение: $\Gamma_2 = \Gamma_2(\psi)$. Здесь ψ — функция тока:

$$r_2 u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial r_2}, \quad r_2 v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Значения u_2 и Γ_2 при $r = 0$ находятся из условий сращивания решений в ядре 1 и в основной части вихря 2:

$$\lim_{r_2 \to 0} u_2 = \lim_{r_1 \to \infty} u_1, \quad \lim_{r_2 \to 0} \Gamma_2 r_2^{-2} = \lim_{r_1 \to \infty} \Gamma_1 r_1^{-2}.$$

Невязкое обтекание щелевых границ

Пусть поток несжимаемой жидкости, имеющий характерный масштаб l, обтекает щелевую границу, размещенную в плоскости $y = 0$. Наличие щели добавляет новый характерный масштаб τl — период щелей в регулярной решетке. Асимптотическое расслоение возможно, если параметр $\tau \ll 1$.

Пример 1. Рассмотрим плоскую стационарную задачу о невязком взаимодействии жидкости со щелевой границей. Задача расслаивается на внешнюю и внутреннюю. Внешняя задача описывает течение жидкости над щелевой границей в масштабе l. Внутренняя задача описывает истечение жидкости из периодической решетки щелей в масштабе τl.

Для решения внешней задачи недостает граничного условия на щелевой границе, связывающего обе компоненты скорости внешнего течения u и v:

$$u = f(v). \tag{4.25}$$

Оно должно добываться из сращивания внешних и внутренних асимптотик.

Решение внутренней задачи зависит от внутренних переменных $\xi = \frac{x - x_0}{\tau}$, $\eta = \frac{y}{\tau}$, а также от x_0 — медленной, «замороженной» переменной, отмечающей выбранное сечение решетки. При $\eta \to \infty$ имеется равномерный поток: $u = u_\infty$, $v = v_\infty$.

Граничные условия протекания в явной форме известны только в случае течения несжимаемой жидкости и в случае линейной теории.

В линейной теории считается, что $v \ll u_\infty$. При $M_\infty < 1$ справедливо уравнение Лапласа, при $M_\infty > 1$ — волновое уравнение. Условие (4.25) линеаризуется: $u = u_\infty + av$, где постоянная a зависит от M_∞, коэффициента проницаемости стенок μ и термодинамических свойств газа.

Если стенка слабопроницаемая, то есть $\mu \ll 1$, то к характерным шкалам $O(1)$ и $O(\tau)$ добавляется еще одна — $O(\mu)$. Решение в мезослое с характерным масштабом $O(\tau)$ представится в виде суммы периодически расположенных на твердой плоскости $y = 0$ точечных особенностей: стоков — для полуплоскости над щелями $y > 0$, где происходит втекание, и источников — для полуплоскости под щелями $y < 0$, где происходит вытекание. Внутренняя зона окружает μ-окрестность единичной щели.

Пример 2. Рассмотрим стационарное обтекание симметричного относительно некоторой оси Ox продольного выреза в плоском экране нулевой толщины безвихревым потоком несжимаемой жидкости. На

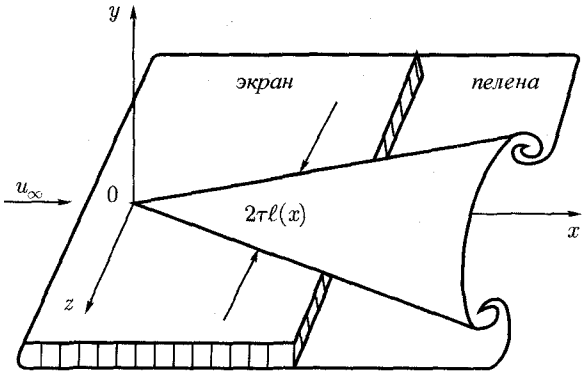


Рис. 4.17. Схема истечения жидкости из выреза в экране

рис. 4.17 изображен треугольный вырез, начало координат расположено в его вершине, ось Oy направлена по нормали к экрану. В общем случае произвольного выреза форма его кромок задается кривой: $z = \pm\tau l(x)$, где $\tau \ll 1$ — удлинение выреза. Частицы жидкости, которые прошли над экраном и под ним, разделены плоскостью экрана и поверхностью разрыва, опирающейся на кромки выреза.

Внешнее разложение описывает течение в масштабе l по всем трем координатам. Характерную величину перепада давления на щели при $\tau = 0$ будем считать известной и равной ε. Во внутреннем разложении справедлив закон плоских сечений (Бетяев, 1993). Нестационарная аналогия справедлива, если $k = \dfrac{\varepsilon}{\tau^2 \ln \tau} = O(1)$; стационарная аналогия справедлива, если $k \gg 1$.

Аналогичным образом рассматривается задача об истечении жидкости через периодически размещенные по оси z продольные щели, имеющие период 2τ.

В задаче об обтекании продольной перфорации нестационарная аналогия справедлива, если $\varepsilon = O(\tau)$; стационарная аналогия справедлива, если $\varepsilon \gg \tau$.

Структура ядра плоского спирального разрыва скорости

Рассмотрим спиральный тангенциальный разрыв скорости. При $\mathrm{Re} \to \infty$ он представляет собой слой смешения, а вся область течения

расслаивается на три асимптотических подобласти (см. Бетяев, Гайфуллин, 2001) в зависимости от порядкового соотношения между характерной толщиной слоя смешения δ и расстоянием между витками спирали l, как показано на рис. 4.18. В зоне 1 различим разрыв скорости: $\delta \ll l$. В зоне 2 влияние вязкости ликвидирует разрыв: $\delta = O(l)$. В зоне 3 влияние вязкости становится доминирующим.

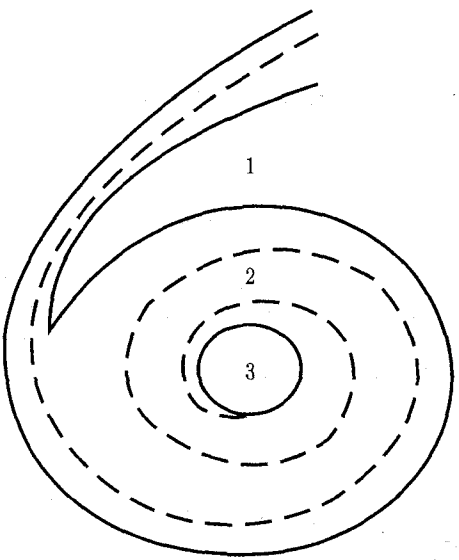


Рис. 4.18. Структура спирального вихря

Движение крылового профиля при наличии дождя

Рассмотрим обтекание плоского тела слабовязким потоком воздуха, содержащим капли дождя. Объемную долю капель в невозмущенном потоке ε будем считать малой величиной. При достаточно больших значениях ε на теле образуется жидкая пленка толщиной $O(\varepsilon)$, сходящая в след. На участке, где капли соударяются с пленкой, образуется *переходный надслой*. Здесь происходит разбрызгивание, резкое торможение капель и, в конечном итоге, образование пленки, то есть превращение

дисперсной среды в сплошную. Математическая модель переходного суперслоя еще не построена.

Поэтому ограничимся случаем, когда толщина этого слоя мала. Тогда кроме ε имеется еще два малых параметра: $\dfrac{1}{\mathrm{Re}} = \dfrac{\nu}{u_\infty l}$ и $\dfrac{1}{\mathrm{Re}_1} = \dfrac{\nu_1}{u_\infty l}$, где ν и ν_1 — кинематические коэффициенты вязкости для воды и воздуха. Число слоев и их взаимное расположение зависят от порядковой величины отношений: $\varepsilon\,\mathrm{Re}^{1/2}$ и $\varepsilon\,\mathrm{Re}_1^{1/2}$.

Критический слой в теории устойчивости пограничного слоя

В линейной теории устойчивости при достаточно больших значениях фазовой скорости волнового возмущения внутри пограничного слоя появляется слой 1, где линеаризация недопустима. Этот внутренний слой называется *критическим*, здесь фазовая скорость равна скорости жидкости: $c = u(y_1)$, как показано на рис. 4.19. Толщина критического слоя равна $O(\delta^{1/3})$, тогда как толщина пристеночного слоя 2, где удовлетворяется условие прилипания, равна $O(\delta^{1/2})$.

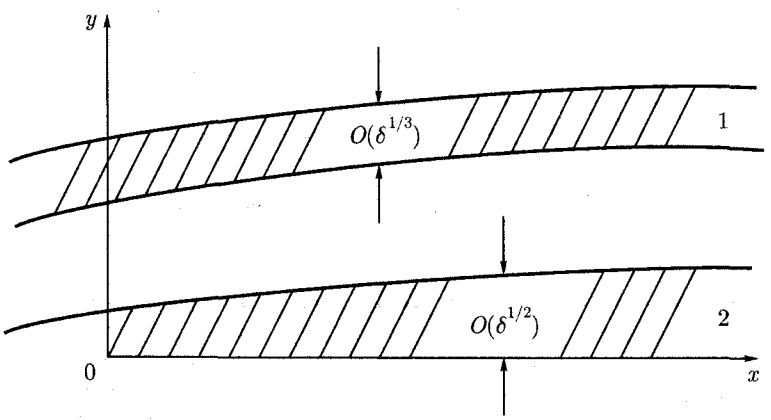


Рис. 4.19. Схема асимптотического расслоения в задаче об устойчивости пограничного слоя: 1 — критический (внутренний) слой; 2 — пристеночный слой

4.7. Расслоение турбулентных течений

Пограничный слой

Структура турбулентного пограничного слоя определяется игрой трех факторов: инерции, вязкости и турбулентности. Достаточно строго ее исследовать не удается — уравнения Рейнольдса являются незамкнутыми. Пономарёвым (1975) для анализа использованы два эмпирических закона: закон дефекта скорости и закон стенки. Таким путем установлена трехзонная структура турбулентного пограничного слоя (рис. 4.20): зона дефекта скорости 3 толщиной $O(lu_*)$, промежуточная зона 2 толщиной $O(lu_*^2)$, пристеночная зона 1 толщиной $O(l\,\mathrm{Re}\,/u_*)$, где $\mathrm{Re} = u_\infty l/\nu$, l — характерный размер тела, $u_\infty u_* = \sqrt{\tau}$, τ — величина, характеризующая порядок напряжения трения на стенке.

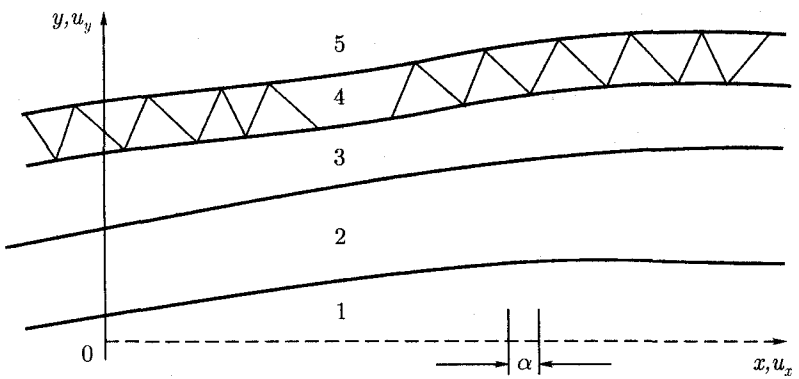


Рис. 4.20. Асимптотическая структура турбулентного пограничного слоя

Суперслой Корсина

На самом деле в турбулентном пограничном слое безвихревое течение отделено от вихревого пульсационного течения так называемым *суперслоем Корсина*, толщина которого равна толщине пристеночного слоя $O(l\,\mathrm{Re}\,/u_*)$. Попадая в суперслой Корсина, незавихренная частица жидкости приобретает завихренность и непредсказуемость движения.

Таким образом, к трём уже рассмотренным зонам следует добавить ещё две: суперслой Корсина 4 и примыкающую к нему зону безвихревого течения 5 (рис. 4.20).

В случае отсоса турбулентного пограничного слоя следует ввести еще одну (шестую) зону — зону отсоса. При достаточно сильном отсосе течение в этой зоне реламинаризуется. В отличие от процесса турбулизации процесс реламинаризации постепенный, не имеющий граничного суперслоя.

Колоннообразный вихрь

Три признака отличают задачу о структуре колоннообразного вихря от задачи о структуре пограничного слоя: нет условия прилипания, есть закрутка, геометрия осесимметричная, а не плоская. Рассмотрим уравнения Рейнольдса, описывающие осесимметричный колоннообразный вихрь в стационарном потоке несжимаемой жидкости, отнеся цилиндрические координаты x, r к l, осреднённые составляющие скорости — к u_∞, осреднённое давление p — к ρu_∞^2, турбулентные напряжения $\overline{u_k' u_j'}$ — к u_∞^2, где ρ — плотность жидкости, u_k' — пульсационная составляющая скорости $(k, j = x, r, \theta)$:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{du_x}{dx} + \frac{\partial p}{\partial x} = \delta^2 \nabla^2 u_x - \frac{\partial \overline{u_x' u_x'}}{\partial x} - \frac{1}{r}\frac{\partial (r \overline{u_x' u_r'})}{\partial r},$$

$$\frac{du_r}{dt} - \frac{\Gamma^2}{r^3} + \frac{\partial p}{\partial r} = \delta^2 \left(\nabla^2 u_r - \frac{1}{r^2} u_r - \frac{1}{r^2} u_r \right) - \\ - \frac{\partial \overline{u_x' u_r'}}{\partial x} - \frac{1}{r}\frac{\partial (r \overline{u_r' u_r'})}{\partial r} + \frac{1}{r}\overline{u_\theta' u_\theta'},$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \delta^2 \left(\nabla^2 \Gamma - \frac{2}{r}\frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right) - r\frac{\partial \overline{u_x' u_\theta'}}{\partial x} - \frac{1}{r}\frac{\partial (r^2 \overline{u_r' u_\theta'})}{\partial r},$$

где $\Gamma = r u_\theta$,

$$\frac{d}{dt} = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad \delta^2 = \frac{\nu}{l u_\infty}.$$

Число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \delta^{-2}$ будем считать большим параметром, а напряжения Рейнольдса — малыми величинами порядка $\varepsilon \ll 1$:

$$\overline{u'_k u'_j} = O(\varepsilon).$$

Такое предположение означает, что величина ε не является тензором, ибо не зависит от индексов k и j — все напряжения Рейнольдса одинаковы по порядковой величине. Наличие двух малых параметров δ и ε предопределяет многоярусную структуру спутного вихря. Кроме этих параметров имеется ещё один — полная циркуляция Γ_0. Ею следует задаваться произвольным образом. Концепция пограничного слоя справедлива, если полная циркуляция мала: $\Gamma_0 \ll 1$. Следуя методу Пономарёва, примем, что структура вихря многослойная, и в каждом n-м слое введём растянутую координату $r_n = r/\delta_n$, где $\delta_n \ll 1$. Кроме того, примем, что составляющие скорости разложимы в асимптотический ряд:

$$u_x = u_n(x, r_n) + \ldots, \quad u_r = \delta_n v_n(x, r_n) + \ldots,$$

где $u_n = O(1)$, $v_n = O(1)$.

Напряжения Рейнольдса будем считать различными по порядку величин в различных подобластях: $\overline{u'_k u'_j} = \varepsilon_n \tau_{kj}(x, r_n) + \ldots$, где $\tau_{kj} = O(1)$, $\varepsilon_n \ll 1$. Давление p и циркуляцию Γ, отнесённую к Γ_0, оставим пока неразложенными в асимптотические ряды. С учётом принятых допущений уравнения Рейнольдса, в главном, достаточном для наших целей приближении принимают укороченный вид:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{1}{r_n}\frac{\partial (r_n v_n)}{\partial r_n} = 0, \tag{4.26}$$

$$\frac{\partial u_n}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\delta^2}{\delta_n^2}\frac{1}{r_n}\frac{\partial}{\partial r_n}\left(r_n \frac{\partial u_n}{\partial r_n}\right) - \frac{\varepsilon_n}{\delta_n}\frac{1}{r_n}\frac{\partial (r_n \tau_n)}{\partial r_n}, \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r_n} = \frac{\Gamma_0^2}{\delta_n^2}\frac{\Gamma^2}{r_n^3}, \tag{4.28}$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{\delta^2}{\delta_n^2}\frac{1}{r_n}\frac{\partial}{\partial r_n}\left[r_n^3 \frac{\partial}{\partial r_n}\left(\frac{\Gamma}{r_n^2}\right)\right] - \frac{\varepsilon_n}{\Gamma_0}\frac{1}{r_n}\frac{\partial (r_n^2 \sigma_n)}{\partial r_n}. \tag{4.29}$$

В этих уравнениях остались лишь две компоненты напряжений Рейнольдса: $\tau_n(x, r_n) = \tau_{xr}$, $\sigma_n(x, r_n) = \tau_{r\theta}$.

Рассмотрим сначала ядро вихря. Определяющие задачу параметры входят в правую часть системы (4.27)–(4.29) в виде четырёх комплексов:

$$\frac{\delta^2}{\delta_n^2},\quad \frac{\varepsilon_n}{\delta_n},\quad \frac{\Gamma_0^2}{\delta_n^2},\quad \frac{\varepsilon_n}{\Gamma_0}.$$

Вблизи оси вихря $r = 0$ инерциальные члены, составляющие левую часть уравнений (4.27) и (4.29), малы, справедлив аналог закона стенки Прандтля: вязкие напряжения компенсируются напряжениями Рейнольдса. Приравнивая по порядку величин члены в правой части (4.27), находим толщину вязкого приосевого подслоя ($n = 1$): $\delta_1 = \delta^2/\varepsilon_1$. Вязкий подслой вихря оказался более толстым, чем вязкий подслой пограничного слоя, имеющий толщину $\delta^2\varepsilon_1^{-1/2}$, ввиду того, что на оси вихря скорость ненулевая.

Ограничившись рассмотрением случая $\Gamma_0 \gg \delta_1$ (при совсем малых значениях Γ_0 влияние закрутки в основной части вихря незначительно), представим решение в виде:

$$\Gamma = \frac{\delta_1}{\Gamma_0}\Gamma_1(x, r_1) + \ldots, \quad p = p_1(x, r_1) + \ldots, \quad \frac{\partial p_1}{\partial r_1} = \frac{\Gamma_1^2}{r_1^3}.$$

Из (4.27) и (4.29) находим:

$$\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1\frac{\partial u_1}{\partial r_1}\right) - \frac{\partial(r_1\tau_1)}{\partial r_1} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r_1}\left[r_1^3\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{\Gamma_1}{r_1^2}\right)\right] - \frac{\partial(r_1^2\sigma_1)}{\partial r_1} = 0. \quad (4.30)$$

Течение безградиентно, распределение осевой скорости и циркуляции по радиусу вихря определяется в результате интегрирования уравнений (4.30) с использованием условия о занулении циркуляции на оси вихря:

$$u_1 = u_{10}(x) + \int_0^{r_1} \tau_1 dr_1, \quad \Gamma_1 = r_1^2\left[\Gamma_{10}(x) + \int_0^{r_1}\sigma_1\frac{dr_1}{r_1}\right].$$

При $r_1 \to 0$ жидкость вращается как твёрдое тело.

Разумно предположить, что τ_1 и σ_1 в вязком подслое по абсолютной величине возрастают с ростом r_1. Тогда, в отличие от феноменологических теорий, ни для u_1, ни для Γ_1 логарифмические законы при $r_1 \to \infty$ не справедливы.

С ростом r_1 влияние вязких членов и турбулентных напряжений ослабевает, причём вязкие члены уменьшаются быстрее. Поэтому имеется зона $n = 2$, где инерциальные члены становятся равными членам, связанным с турбулентными пульсациями. Толщина этой *промежуточной области* зоны, определяемая из (4.27), как и ожидалось, совпадает с толщиной промежуточной области обычного пограничного слоя: $\delta_2 = \varepsilon_2$. Из опыта известно, что толщина промежуточной области больше толщины ламинарного пограничного слоя: $\delta_2 \gg \delta$.

Циркуляция Γ в промежуточной зоне равна $O(1)$. Имеем:

$$\Gamma = \Gamma_2(x, r_2) + \ldots, \quad p = \frac{\Gamma_0^2}{\delta_2^2} p_2(x, r_2) + \ldots, \quad \frac{\partial p_2}{\partial r_2} = \frac{\Gamma_2^2}{r_2^3}.$$

Условия сращивания на границе между вязким слоем и промежуточным имеют вид:

$$\lim_{r_1 \to \infty} u_1(x, r_1) = \lim_{r_2 \to 0} u_2(x, r_2), \quad \lim_{r_1 \to \infty} \Gamma_1(x, r_1) = \lim_{r_2 \to 0} \Gamma_2(x, r_2).$$

Уравнения в обеих зонах остались незамкнутыми, поэтому получить точный вид предельных функций, как при $r_1 \to \infty$, так и при $r_2 \to 0$, не удаётся. В теории Пономарёва для этой цели используется логарифмическая форма закона стенки[1], которую в рассматриваемой задаче нельзя считать достаточно обоснованной. В наиболее общем случае $\Gamma_0 = \delta_2$ течение безградиентно:

$$\frac{du_2}{dt} + \frac{\partial p_2}{\partial x} = -\frac{1}{r_2} \frac{\partial (r_2 \tau_2)}{\partial r_2}, \quad \frac{d\Gamma_2}{dt} = -\frac{1}{r_2} \frac{\partial (r_2^2 \sigma_2)}{\partial r_2}.$$

Естественно предположить, что, кроме двух рассмотренных зон, имеется внешняя *зона дефекта скорости и циркуляции* 3, где отличие Γ и u_x от 1 мало:

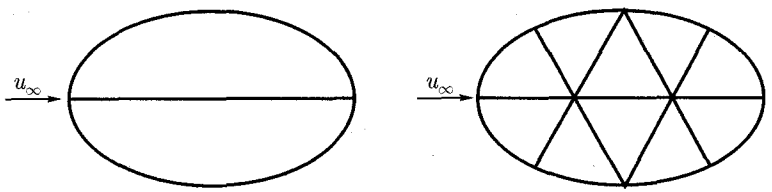
$$\Gamma = 1 + \alpha \Gamma_3(x, r_3) + \ldots, \quad u_x = 1 + \beta u_3(x, r_3) + \ldots,$$

где $\alpha, \beta \ll 1$. Из (4.28) находим, что главный член разложения для давления не зависим от x:

$$p = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma_0^2}{\delta_3^2} \frac{1}{r_3^2} + \alpha \frac{\Gamma_0^2}{\delta_3^2} p_3(x, r_3) + \ldots,$$

где $\dfrac{\partial p_3}{\partial r_3} = \dfrac{2\Gamma_3}{r_3^3}$.

[1] Три полуэмпирических закона теории турбулентного пограничного слоя: закон стенки, закон дефекта скорости и закон следа (Монин, Яглом, 1992) — допускают различные, перечисленные в порядке убывания своей общности формы выражения: вербальную, формульную и конкретную (в виде логарифмического закона).



а) *б)*

Рис. 4.21. Схема дальнего следа: *а* — $N = 2$; *б* — $N = 10$

Таким образом, триадная структура колоннообразного вихря включает область дефекта скорости и циркуляции, промежуточную область и вязкое ядро. Толщина зоны δ_3 осталась неопределённой. В теории Пономарёва для этой цели, как и в законе стенки, использовался логарифмический закон дефекта скорости, который в данной задаче нельзя считать обоснованным.

4.8. Более крутые примеры

К теории ламинарных следов

В реальных условиях след за обтекаемым телом всегда турбулентный. Поэтому ламинарная модель следа представляется математической виртуальностью — идеализацией, возможной лишь при полном отсутствии неустойчивостей.

Теория плоского следа предложена В. В. Сычевым (1987). Ближний след размером $O(l) \times O(l)$, где l — характерный размер тела, представляет собой течение Гельмгольца. Дальний след — это вихревая зона размером $O(l\,\mathrm{Re}) \times O(l\,\mathrm{Re}^{1/2})$. В этом масштабе тело стягивается в точку. В рамках таких предположений построить стационарное течение не удалось. На самом деле течение в очень вытянутой вихревой зоне неустойчиво — оно разделяется на более мелкие и менее вытянутые подзоны. Такой «ламинарный сценарий» перехода к турбулентности подразумевает, что при $\mathrm{Re} \to \infty$ образуется $N(\mathrm{Re})$ замкнутых «треугольных» зон циркуляционного течения. Знак циркуляции от зоны к зоне поочередно меняется. Сначала зон нет ($\mathrm{Re} \ll 1$), при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_1^*$ появляются две зоны (рис. 4.21 *а*), при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_2^*$ — десять зон (рис. 4.21 *б*), при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_3^*$ — четырнадцать зон и т. д.; $N \to \infty$, когда $\mathrm{Re} \to \infty$.

Таким образом, след становится ячеистым — имеется последовательный ряд бифуркационных значений числа Re: $\mathrm{Re}_1^* < \mathrm{Re}_2^* < \mathrm{Re}_3^* \ldots$ С увеличением числа Re в пределах $\mathrm{Re}_m^* < \mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{m+1}^*$, где m — номер бифуркации, след в целом и каждая ячейка в отдельности удлиняются, течение приобретает неустойчивость. *Настоящая турбулентность* наступает при некотором значении $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}^{**}$.

След за самолетом имеет выраженную специфику. Ближнее поле имеет многоспиральную вихревую структуру. Наряду с *антипарой* основных, самых интенсивных вихрей, сходящих с концов крыла, имеются вторичные вихри, сходящие с неровностей поверхности самолета и вытекающие из двигателей струи. Дальний след моделируется *вихрем Бэтчелора* (Бэтчелор, 1964).

Примером нестационарного следа является *спиральный вихрь Прандтля*. Интересно отметить, что такое течение допускает *геометрическую линеаризацию* — при малой интенсивности вихрь стягивается в прямую линию конечной длины, отходящую от задней кромки крылового профиля.

Плоские волны за надводным судом синусоидальны, трехмерный след представляет собой систему волн Кельвина.

В капельной жидкости при малом значении числа кавитации K след за обтекаемым телом кавитационный. В предельном случае $K = 0$ для ближнего следа снова справедлива схема Гельмгольца.

Ближний след в сжимаемой жидкости — это система ударных волн и волн разрежения. Вдали от тела след вырождается в N-волну.

Метод Маслова

В. П. Масловым обнаружено явление «полного резонанса» — появление многомерного цуга волн большой амплитуды, фазы которых являются линейной комбинацией фаз исходных волн (Маслов, 1987). Явление полного резонанса рассмотрено им на примере задачи о движении вихря в потенциальном потоке.

Скорость $\boldsymbol{u}$ слагается из безвихревой и вихревой составляющей:

$$\boldsymbol{u} = \nabla\varphi + \nabla \times (\Delta^{-1}\omega),$$

где $\Delta\varphi = 0$. Начальное значение завихренности равно:

$$\omega|_{t=0} = \omega_1^0\left(\frac{\boldsymbol{k}_1^0\boldsymbol{x}}{\nu^{1/2}}, \boldsymbol{x}\right) + \omega_2^0\left(\frac{\boldsymbol{k}_2^0\boldsymbol{x}}{\nu^{1/2}}, \boldsymbol{x}\right),$$

векторы $\boldsymbol{k}_1^0$ и $\boldsymbol{k}_2^0$ коллинеарны. Маслов показал, что функция

$$\omega(\boldsymbol{x}, t, \mathrm{Re}^{-1/2}) = \omega_0\left(\frac{S_1(\boldsymbol{x}, t)}{\nu^{1/2}}, \frac{S_2(\boldsymbol{x}, t)}{\nu^{1/2}}, \boldsymbol{x}, t\right)$$

является главным членом асимптотического решения задачи Коши для уравнения переноса завихренности, где $\dfrac{\partial S_{1,2}}{\partial t} + (\nabla\varphi\nabla S_{1,2}) = 0$, $S_{1,2}|_{t=0} = (\boldsymbol{k}_{1,2}^0, \boldsymbol{x})$.

В случае комбинации фаз двух быстро и медленно осциллирующих волн решение уравнения Навье–Стокса оказывается неединственным. Однако осредненные характеристики потока определяются однозначно.

Метод ренормализационной группы

Метод ренормализационной группы предназначен для решения задач, содержащих большое число взаимодействующих степеней свободы, поэтому эффективен при решении задачи о турбулентном течении, содержащем большое число взаимодействующих вихрей.

История метода началась с 1953 года, когда швейцарские ученые Е. Штюкельберг и А. Петерман обнаружили особую непрерывную группу преобразований в перенормированной, то есть избавленной от *ультрафиолетовой расходимости*, квантовой теории поля. В дальнейшем эти преобразования, названные ренормгрупповыми, применялись к функциональным уравнениям. В 1971 году нобелевский лауреат К. Дж. Вильсон применил ренормгрупповой метод к критическим явлениям. С помощью аналогичного метода М. Фейгенбаум исследовал переход к беспорядку в простой динамической системе. В гидродинамике предприняты попытки применения ренормгруппы к моделированию *подсеточной турбулентности*.

Рассмотрим идею метода на простом примере струйного течения. Пусть g — некоторая осредненная по сечению характеристика струи, зависящая от «начальных» данных g_0 в некотором сечении и от расстояния от этого сечения. Выделим два сечения, одно из которых отстоит от «начального» сечения на расстоянии l, а другое — на расстоянии $l + \lambda$. Тогда $g_1 = g(l, g_0)$, $g_2 = g(l + \lambda, g_0)$. Вместе с тем можно представить величину g_2 как функцию «начальных» данных в сечении $x = l$: $g_2 = g(\lambda, g_1)$. Приравнивая оба выражения для g_2, получим искомое функ-

циональное уравнение:

$$g(l+\lambda, g_0) = g[\lambda, g(l, g_0)]. \tag{4.31}$$

Это уравнение, постулирующее особую форму «памяти» течения о предыстории, и аналогичные ему были получены для различных задач гидродинамики и физики. Они устанавливают функциональное подобие процесса и поэтому называются функционально автомодельными. В линейном приближении функциональная автомодельность эквивалентна обычной автомодельности, а в общем случае представляет собой ее обобщение.

Эффективность ренормгруппового метода особенно проявляется, когда точное решение содержит сингулярность, которую нельзя предсказать с помощью обычных методов возмущений, основанных на использовании конечного числа членов асимптотического ряда. Точное решение функциональных уравнений неотвратимо выявляет сингулярность.

Функциональным уравнениям ставится в соответствие группа Ли, а группе Ли — дифференциальные уравнения Ли, общие решения которых получены Л. В. Овсянниковым (1956). В соответствии с теорией групп Ли эти решения описываются преобразованием, бесконечно близким к тождественному. К примеру, для решения уравнения (4.31) требуется лишь знание производной по l в сечении $l = 0$.

Приложение А

Введение в метаисторию наук

История наук имеет ряд отличий от истории государств и народов.

Науки подразделяются на фундаментальные (метанауки), когнитивные и прикладные. Фундаментальная и когнитивная науки выполняют познавательную функцию, прикладная — утилитарную.

Не все ученые согласны с таким делением. Вот как об этом пишет известный английский математик Г. Харди (2000, с. 82): «Возникает одно прелюбопытное заключение: чистая математика в целом явно более полезна, чем прикладная. Чистая математика обладает преимуществом перед прикладной математикой и с практической, и с эстетической стороны. Наиболее полезен прежде всего математический *аппарат*, или математическая *техника*, а его изучают главным образом при помощи чистой математики.

Надеюсь, нет необходимости особо оговаривать, что я отнюдь не пытаюсь умалить или принизить математическую физику — великолепную научную дисциплину с замечательными проблемами, решение которых дает широчайший простор самому буйному воображению. Но не заслуживает ли положение обычного прикладного математика небольшого сочувствия? Если он хочет быть полезным, то ему приходится использовать скучные, банальные методы, и он не может дать волю своей фантазии, даже если желает подняться до небывалых высот».

Нелестно о прикладной математике отзывается В. И. Арнольд (2002, с. 66): «Так называемая «прикладная математика» чаще всего устроена... воровским образом. Пастер давно уже провозгласил, что *никаких «прикладных наук» не бывает*: это просто способ выкачивать средства на свои потребности, отнимая их у истинных первооткрывателей. На самом деле, по словам Пастера, существует только *наука*, открывающая *истины*. И еще существуют *приложения* этой науки, не составляющие сами по себе никакой отдельной «прикладной науки» — так говорил Пастер, величайший прикладник, которого трудно заподозрить в ненужных человечеству занятиях».

Трудно удержаться, чтобы не привести еще одно суждение — цитату из книги Блюменфельда (2002). «Строго говоря, наука может быть только фундаментальной. Прикладной науки не существует. Есть только наука и ее приложения. В одном из своих романов американский писатель Митчелл Уилсон сказал, что ученым называется человек, умеющий узнавать новое, а инженером — человек, умеющий делать новое. Это разные профессии».

Фундаментальная наука посвящена обсуждению принципов, лежащих в основе какой-либо выбранной науки; в когнитивной науке принципы не обсуждаются, они считаются заданными. Фундаментальная наука не имеет чёткого разграничения с прикладной наукой. Первая — это поиск законов природы, уровень идей, вторая — это внедрение идей в практику, уровень ноу-хау. Прикладники скорее используют научные достижения, чем создают их; они ближе к технике, чем к науке.

В соответствии с таким делением история наук подразделяется на историю фундаментальных наук, историю когнитивных наук и историю прикладных наук.

Для метаистории предметной наукой является история, и посвящена она обоснованию, методологии, парадигматике и истории самой истории, а также выявлению перспектив развития и связей с другими науками. Метаистория наук, базирующаяся на философии и истории наук, представляет собой переход от мира анализа взаимосвязанных фактов к миру идей, прогнозов и озарений. «Философия науки без истории науки, — считает И. Лакатос, — пуста; история науки без философии науки слепа». История — это теория, метаистория — это мировоззрение.

А.1. Историческое время

О том, что такое время, не знают ни ученые, ни философы, ни богословы. «История, — пишет Л. Гумилёв (1997, с. 425, 433), — это изучение процессов, протекающих во времени, но что такое время, не знает никто. В этом нет ничего удивительного. Вероятно, рыбы не знают, что такое вода, потому что им не с чем сравнивать. <...> Историческое время в отличие от физического (протяженного), биологического и относительного (континуума) обнаруживает себя через насыщенность событиями» (см. также Хайдеггер, 1998; Хокинг, 2000).

Лучше всего о времени сказал святой Августин в своих «Исповедях»: «Что же тогда есть время? Если никто не спросит меня, я знаю; если я захочу объяснить это тому, кто спросит, я не знаю».

Каждый динамический процесс характеризуется своим внутренним (собственным) временем, которое соотносится с обычным временем, например с солнечным. Самое удивительное свойство времени — его направленность от прошлого к будущему. Коль скоро время простирается от независимого от нас прошлого к подвластному нам будущему, то их разделяет и нерасторжимо связывает настоящее. Будущего нет, настоящее исчезает, а прошлое остаётся с нами.

Введение временной координаты необходимо, когда происходит изменение сущего. Поскольку процесс творения Вселенной динамический, должна существовать некоторая тоже временная координата, характеризующая переход от «ничего» к Большому взрыву. Условно назовём это время *Абсолютным*. Прогнозировать исторически свершившееся и свершающееся в Абсолютном времени невозможно, ибо для этого у нас нет никаких данных: физические и логические законы здесь не действуют. Поэтому допустимо отсутствие направленности Абсолютного времени, причинности, а также уподобление времени пространственной координате и пр.

Введение Абсолютного времени T означает, что наше время t, связанное, например, с солнечным, становится по отношению к нему внутренним. Создателю известно наше будущее до конца света либо полностью, либо частично. В tT-плоскости возможен поток информации в «обратном направлении». Эта гипотеза может объяснить многие парадоксы, в частности механизмы вдохновения (инсайта), прозорливости и ясновидения. Абсолютное время имеет непостижимое для нас целостное измерение вечности, охватывающее сразу прошлое, настоящее и будущее.

Большинство ученых считают, что обычное внутреннее время t имеет начало $t = 0$ (Большой Взрыв) и конец $t = t_{\max}$ — *точка Омега* по терминологии Тейяр де Шардена (2001).

Время как исходное, нематериальное и неопределяемое понятие лежит в основе всех наших представлений о мире, в частности в основе истории. Исторический процесс характеризуется своим внутренним временем, которое может быть введено для отдельного государства, для отдельного исторического процесса и для отдельной цивилизации (Бетяев, 1999; 2003а). Поскольку имеется зависимость от времени, история описывает динамический процесс — сложное социокультурное явление, подчиняющееся системному анализу, общим синергетическим законам.

Историческое время имеет начало. Ясперс (1994) вводит так называемое *осевое время*. Оно началось в 800–200 годах до н. э., когда по

всему земному шару прокатилась общая «духовная волна» (Будда, Конфуций, Заратуштра).

С течением времени исчезают подробности жизни ученых, но их творчество остается в истории наук. Чем ни ближе ученые жили к началу осевого времени, тем труднее им было творить, тем выше при прочих равных условиях значимость их работ.

История наук не является циклическим процессом. Здесь нет спадов, присущих истории государств. Поэтому можно ввести понятие *энтропии науки* S, в качестве которой взять, например, постоянно увеличивающийся объем научной информации. Тогда для любой науки справедливо неравенство — аналог второго начала термодинамики:

$$\frac{dS}{dt} \geqslant 0. \tag{A.1}$$

Человек, животные и роботы обладают памятью, необходимой для жизни кибернетической операцией, позволяющей фиксировать, отбирать и сохранять взятую из прошлого информацию, часть из которой, превращаясь в традицию, создает культуру. Историческая память — это не только память людей, но и письменные, электронные и прочие свидетельства о прошедших событиях. Человеку, владеющему прошлым, принадлежит будущее. Всё новое прочно связано с прошлым, в котором оно зарождалось, в которое уходят его корни, из которого мы познаём настоящее и которым подпитываем национальный характер. Без отбора полезных для общества традиций невозможно не только развитие, но и существование цивилизаций. «Идти вперед, — говорил М. М. Бахтин, — может только память, а не забвение».

А.2. Сущность истории наук

Древнеримский принцип: «De mortuis aut bene aut nigli»[1] — в истории не применяется, потому что она, устремленная к истине, учит нас на ошибках предшественников разделять добро и зло. Наоборот, о живых, о тех, кто еще не завершил свои земные дела, история умалчивает — в этом случае оценки преждевременны. Современность изучают не историки, а политики.

Историки строят исторические модели уже свершившихся процессов на основе имеющейся у них базы данных. Поэтому есть два вида

[1] О мертвых — хорошее или ничего.

историков: источниковеды, занимающиеся добычей источников и их верификацией, и просто историки, занимающиеся созданием исторических моделей[1].

Базу фактов назовем разрозненным множеством, а историческую модель — сглаженным множеством, «аппроксимирующим» разрозненное множество. Поскольку в истории нет правил «аппроксимации», число возможных сглаженных множеств теоретически бесконечно. История — это воскрешение прошедших событий *с определенной точки зрения*, а историческая объективность — это сумма субъективностей. Справедливо считается, что историй столько, сколько историков[2]. Историческая наука многозначна. Кроме того, нет критерия, отличающего «правильную» историческую модель от «неправильной». И даже нет самого понятия «правильности».

Полибий приписывал истории двойную дидактическую цель: извлекать уроки и учиться стойко переносить удары судьбы. Для него история — не изложение фактов, а прагматическое осмысление прошлого.

«...в истории первое дело — ставить себя на место людей, о которых намерен судить, входить в их инстинкты и навыки, проникаться их чувствами, переделывать их мысли, воспроизводить в себе их внут-

[1]Вот как начинает свои лекции нобелиат Юкава: «Я буду говорить о том, чему можно научиться из прошлого, как преломить прошлый опыт применительно к настоящему моменту. Полагаю, что подходить к прошлому лишь как к набору свершившихся фактов было бы крайне неумно» (Юкава Х. Лекции по физике. М.: Энергоиздат, 1981. С. 8). И еще одна цитата. «Мысль не может не развиваться, ибо таково свойство человеческого разума. Конечно, поиском факта ради самих фактов можно заниматься сколь угодно долго. Однако рано или поздно ум человека, вооруженный обилием данных, неизбежно придет к заключению, что все это множество фактов необходимо некоторым способом упорядочить. Приходит черед синтеза и интерпретации накопленного. Затем вновь повторяется предыдущий цикл; так развивается наука. Ни одно собрание фактов никогда не является полным, потому что Вселенная разомкнута. Равным образом ни одно обобщение не является окончательным, потому что со временем обнаружатся новые факты, которые приведут к взрыву уже упорядоченной научной схемы» (Тойнби А. Дж. Постижение истории. М.: Прогресс, 1996. С. 35).

Л. Н. Гумилёв дает более детальную классификацию, насчитывая пять видов занятий историей. «Историей ныне называют целый ряд занятий, хотя и связанных друг с другом, но весьма различных. 1) Публикация и перевод древних источников — занятие необходимое, но дающее только сырье. 2) Историческая критика, отсеивающая сознательную, а иногда неосознанную ложь древних авторов — получение полуфабриката. 3) Сопоставление добытого материала с накопленным ранее — это уже продукт, но еще не предмет потребления. 4) Интерпретация данных в плане поставленной проблемы. 5) Постановка новых проблем, выходящих на стык наук» (Гумилёв, 1997, с. 426). Речь идет об историях государств. Историкам науки не нужно заниматься *критикой*, ибо их исходные материалы не фальсифицированы.

[2]Согласно пословице: «Два еврея — три мнения».

реннее состояние, представлять себе во всей подробности и вполне наглядно окружавшую их среду, следить воображением те обстоятельства и впечатления, которые, присоединяясь к их врожденному характеру, определяли деятельность и направляли их жизнь» (Тэн, 1996).

Следует различать два исторических времени. Одно — это то, в котором развивается сама изучаемая наука. Второе — это то, в котором развиваются исторические модели этой науки или, в более общем случае, сама метанаука. Следовательно, история зависит от времени двояким образом.

В истории наук, как и в истории народов, велика роль личности. «История полыхает, как громадный костер, и каждый из нас бросает в него свой хворост» (Ю. Трифонов).

А.3. Как мы познаём мир

Познание мира происходит, в частности, с помощью науки. В чем состоит основное предназначение науки?

√ В обеспечении прогресса: получении новых технологий, стимулирующих развитие медицины, связи и всего хозяйства.

√ В познании мира. Одним из основных методов познания реальности является моделирование — познание свойств не реального объекта, а его модели. В точных науках применяется математическая модель. Каждая модель содержит погрешности. Приближение к истине происходит путем исправления этих погрешностей.

√ В экономии мышления. Принцип экономии мышления выдвинут Э. Махом и Р. Авенариусом.

√ В замене интуиции (здравого смысла) рассудочной составляющей (алгоритмами).

√ В прогнозе событий.

Наука фиксирует, объясняет, предсказывает. Какая из этих функций главная? *Инструменталисты* считают, что главным назначением науки является предсказание. *Антиинструменталисты* считают, что главное назначение науки — объяснение. В зависимости от цели могут оказаться важными и объяснение, и предсказание.

Во второй половине прошлого века властителями умов ученых были американский науковед Т. Кун, английский философ К. Поппер и его ученик И. Лакатос[1]. Науковеды знают много наук, но поверхностно; учёный

[1]Лакатос родился в Венгрии в 1922 году. Свою настоящую фамилию ему пришлось менять дважды: спасаясь от нацистов, он сменил откровенно еврейскую фамилию Лип-

знает глубоко, но одну науку. Согласно теории Куна (2002) науки развиваются не плавно, как показано на рис. А.1 *а*, а скачками (рис. А.1 *б*). Эти скачки Кун назвал научными парадигмами (от греч. παράdeigma — пример, образец). Взятый из грамматики термин «парадигма» использовался и до Куна. Он соответствует, например, термину В. И. Вернадского (1981) «формальная реальность».

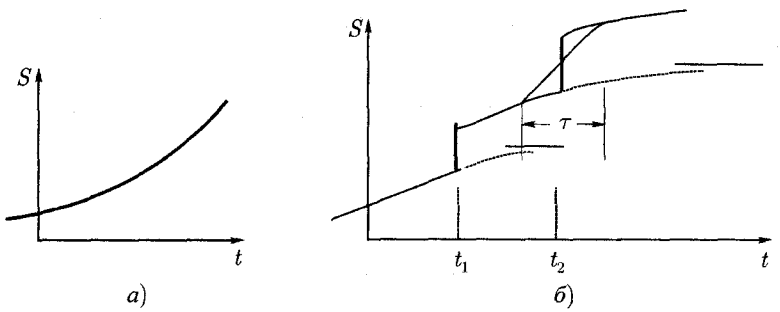


Рис. А.1. Увеличение энтропии: *а* — монотонное; *б* — разрывное

В период между парадигмами наука развивается монотонно. Начиная с некоторого времени на границе области действия парадигмы — там, где ее влияние ощущается слабее, — накапливаются факты, противоречащие этой парадигме. Кун назвал их аномалиями. «Открытие, — пишет он, — начинается с осознания аномалии, то есть с установления того факта, что природа каким-то образом нарушила навеянные парадигмой ожидания, направляющие развитие нормальной науки». Аномалии можно связывать с неустойчивостью научного прогресса, со сменой одного состояния другим.

Можно считать, что на рис. А.1 по оси абсцисс отложено время, а по оси ординат — некая количественная характеристика научного прогресса, например энтропия как мера информации. Пунктирная кривая — выходящая на асимптоту виртуальная траектория, построенная в предположении, что парадигмы нет. Однако даже при *парадигмальном* развитии науки некоторая часть ученых продолжает трудиться в рамках

шиц на венгерскую Мольнар (мельник), а спасаясь от пришедших к власти после войны венгерских коммунистов, он сменил свою вторую фамилию на еще более пролетарскую — Лакатос (столяр). Несмотря на все усилия, был обвинен в «ревизионизме», провел более трех лет в лагерях, а затем эмигрировал в Англию.

старой парадигмы, а некоторая часть — в рамках еще более старой парадигмы.

Термин «парадигма» трактуется по-разному: «... каковы бы ни были истинные намерения Куна, все же он понимал термин «парадигма» более содержательно. У него это скорее социологическое понятие, норма, принимаемая какой-то группой исследователей: так сказать, то, что они считают правильным, а что — неправильным» (Кобзарев, Манин, 1997). Смысл этого термина зависит от изучаемого объекта. Дугин (2002) выбрал самый большой масштаб — всю культуру человечества, Дойч (2001) — всю науку, а Владимиров (2002) — теоретическую физику. Парадигмы в гидродинамике установлены в разделе 1.2.

Концепция Куна подверглась разгромной критике со стороны К. Поппера, И. Лакатоса (см. Кун, 2002), В. Л. Гинзбурга (1985) и других. Опровержение старой парадигмы Поппер называет *фальсификацией*; каждая математическая модель принципиально ошибочна, приближение к истине возможно только путем исправления этих ошибок при помощи вытекающих из опыта базисных суждений.

Однако общая схема развития науки по схеме «норма–кризис–норма», представленной на рис. А.1 *б*, критиками не отрицалась.

Итак, энтропия S как мера информации изменяется с течением времени t кусочно-непрерывным образом. С геометрической точки зрения, парадигма (скачок) соответствует случаю, когда производная dS/dt достаточно велика, то есть время смены парадигмы τ гораздо меньше характерного времени *нормального развития* науки: $\tau \ll t_2 - t_1$.

Имеется некоторый критический масштаб, ниже которого несправедливо само понятие исторической модели. В истории государств и народов — это масштаб области, района. В этом масштабе история становится краеведением. В истории наук тоже имеется предельно малый масштаб, но он сильно зависит от конкретных условий.

Описание исторического процесса, отражающее его определенные свойства с некоторой степенью точности, называется исторической моделью. Историческое моделирование является основным методом познания прошлого.

В соответствии с установками выдающегося английского учёного А. Дж. Тойнби историк прежде всего должен обозначить *поле исследований* и *цель*, что предопределит выбор *метода исторического анализа*. Иначе история в лучшем случае станет простым перечислением фактов и памятных событий, а в худшем случае — формой манипуляции сознанием. Цели построения новой исторической модели разнообразны: память о выдающихся деятелях науки и техники, систематиза-

ция и классификация знаний, поиск нерешенных проблем, прогностика и пр.

История подразделяется на дескриптивную (описательную) и прескриптивную (инструментальную). Работу историка можно разбить на следующие этапы.

1. Выделение из общей базы исторических знаний (множества) локальной базы данных (подмножества).

2. Текстология: комментирование базы данных и существующих исторических моделей, выяснение их внутренних причинно-следственных связей и связей с научными парадигмами, определение множественности и амбивалентности смыслов.

3. Структуризация локальной базы данных: классификация, фрагментирование, выделение фреймов, кластеров, графов, семантических сетей (Агеев, 2002, с. 210), библиографическая и наукометрическая обработка текстов.

4. Интерпретация (герменевтика): толкование документов и исторических моделей, обсуждение достоинств и недостатков, выявление противоречий, «белых пятен» и субъективизма. Герменевтика[1] подразумевает проникание в чужое сознание, в чужую психологию, в другое время.

5. Построение новой исторической модели, новых семантических связей. Если они не вписываются в традиционную концептуальную систему, то речь должна пойти о смене парадигмы.

История свойственна научному обзору. Любая малая научная проблема имманентно связана с историей ее исследования.

А.4. Критерии объективности

База данных состоит из научных документов (статей, монографий, книг и т. д.) и исторических моделей. Если научные документы объективны по своей природе, то исторические модели субъективны. Они, во-первых, искажены из-за объективных закономерностей, связанных с передачей информации (Винер, 1958), а во-вторых, фальсифицированы в угоду руководителям. Легенды смешаны с былью, мемуары ученых насыщены узколичным восприятием действительности. Исторические модели сервильны, мифологизированы.

[1]Герменевтика зародилась в античные времена для истолкования аллегорий Гомера и получила свое развитие в эпоху Возрождения в связи с необходимостью интерпретации библейских текстов, которая включает три этапа: понимание, экспликацию и применение.

Возможно ли создание *объективной истории*? На каких принципах она должна базироваться?

Сделать историю народов и государств объективной — об этом мечтали историки всех времён и народов, начиная от знаменитых семи мудрецов. Древнегреческий историк Полибий ратовал за создание «рациональной истории». Древнеримский историк Тацит считал, что пишет «sine ira et studio», то есть «без гнева и пристрастия». Несмотря на развитие герменевтики, такая мечта до сих пор остаётся неосуществлённой. Sine studio... Совсем как у Ф. Искандера: «Что же такое история? Ничего. Реке всё равно, что на ней ставят: бойню или мельницу».

По-другому обстоит дело с историей наук. Имея более или менее определённую хронологию и базируясь на объективном материале, она принципиально отличается от естественной истории. Внедрение клиометрических методов делает её более объективной, основанной на количественных соотношениях, снимает вуаль идеологии, гипноза школ и личностей.

Метод объективного отбора выдающихся учёных, школ и открытий опирается на использование *индекса цитирования*. Индекс цитирования отличает учёного, занимающегося фундаментальными исследованиями, от учёного-прикладника. Учёные, имеющие индекс цитирования, составляют *мейнстрим науки*.

В 1960-х годах, когда, в связи с повальной компьютеризацией, выкристаллизовалась идея о всеобщем «оцифиривании» всех и вся, стало ясно, что чуть ли не единственной мерой полезности публикации является её цитирование: чем чаще цитируется работа, тем весомее её вклад в развитие науки, тем выше творческая активность автора. Ссылки на литературу отражают дань уважения автора к своим коллегам и его научную добросовестность. С 1966 года Институт научной информации в Филадельфии (США) имени Гартфилда, его основателя, регулярно издаёт толстые тома «Science citation index», то есть «Указателя научного цитирования».

Анализ цитирования научных работ позволяет проследить за динамикой идей, их проникновением в смежные области, обнаружить симптомы научных революций. Цитирование связывает все работы в единое древо знаний, где каждая статья является дополнением к предыдущим и, в свою очередь, либо замыкает данную ветвь, либо дает на ней новые побеги.

Индексы цитирования — скорее необходимость, чем достоверность. Это — всего лишь грубая мера признания и полезности научной статьи. Разумеется, идеальных рейтингов учёных не бывает. Однако в условиях

глобализации экономик и культур количественные оценки игры теннисистов, деятельности артистов и учёных необходимы. Ни должность, ни звание, ни степень не являются объективными критериями учёности. Известно, что нельзя применять индекс цитирования для материального поощрения действующих учёных, однако его естественно использовать для исторического анализа. Использование индекса цитирования не является абсолютным критерием хотя бы потому, что созданная на этой основе история наук подвержена временным изменениям. Ничего не поделаешь — старое неизбежно переоценивается, исторические оценки зависят от *исторического времени*, от того, «какое у нас тысячелетье на дворе».

Несмотря на применение клиометрии, элементы субъективности в истории наук всегда остаются. История — это не простое воскрешение событий, а их воскрешение *с определенной точки зрения*. Историю пишут люди, и они вольно или невольно привносят «аромат эпохи». Хорошо об этом сказал выдающийся русский художник М. В. Нестеров: «Историки Карамзин, Костомаров, Ключевский потому только ярко сияют в исторической науке, что они в высшей степени субъективны».

Следует оговориться, что выбор индекса цитирования в качестве рейтинга совсем не оправдан для оценки деятельности учёного-прикладника, который обычно его не имеет. В этом случае пришлось вернуться к подсчёту числа статей учёного. Не всех статей, а лишь тех, которые прошли рецензию и опубликованы в журналах с достаточно высоким собственным рейтингом, называемым *импакт-фактором*[1]. Распределение таких статей по годам — *индекс публикаций* (или *индекс Сороса*) — даёт представление о динамике творческой активности учёного-прикладника или инженера. Разумеется, использование индекса публикаций ограничено секретностью. Учёный, занимающийся секретными работами, на какое-то время лишается открытых публикаций, а значит, и цитирования; к нему обсуждаемый критерий не применим.

Индексы цитирования и публикаций являются не истинными рейтингами деятельности ученого, а лишь некоторой корреляцией этой истины. Философы и историки применяют их только потому, что лучших приближений к истине не существует. Индексы цитирования и публикаций помогают определить перспективу развития науки, ее географию и эволюцию.

Деятельность изобретателей оценивается по числу патентов.

[1]Импакт-фактором называется дробь, в знаменателе которой стоит число опубликованных в журнале статей за последние два года, а в числителе — число ссылок на эти статьи в достаточно престижных журналах.

Наконец, есть ученые, которые имеют наивысшую и наиболее устойчивую форму признания. Нет, это не только нобелевские лауреаты! Это — классики естествознания, те, чьи имена присвоены законам, эффектам, теоремам, реакциям, уравнениям и т. д.

Таким образом, в науковедении имеется мера — числовая оценка деятельности учёных, научных школ, институтов. При таком подходе сразу же выявляется исключительная роль английских учёных в развитии гидродинамики. Не следует забывать, что в прошлом Англия была великой морской державой и родиной первой промышленной революции. Особенности развития Англии во многом обусловлены ее островным положением и вытекающей отсюда относительной изолированностью, консервативностью, а следовательно, и автохтонной[1] культурой. Вот имена выдающихся английских учёных, вошедшие в учебники по гидродинамике: Дж. Стокс, Дж. Рэлей, Г. Ламб, О. Рейнольдс, У. Кельвин, Дж. С. Рассел, У. Фруд, Ф. Вейнхэм, Р. Митчелл, Л. Розенхед, Дж. Тэйлор, С. Гольдштейн, К. Стюартсон, Ф. Ланчестер, К. В. Манглер, М. Дж. Лайтхилл, Дж. Бэтчелор, Г. Моффат, Ф. Т. Смит. Дабы не ослепить читателя блеском имён, сюда не включены основоположники «всего» естествознания: У. Оккам, Ф. Бэкон, И. Барроу, Р. Гук, И. Ньютон. Научные биографии каждого из них подробно описаны. Ограничимся лишь напоминаниями о двух из них.

Сэр Джеффри Ингрем Тейлор (1886–1972) — внук Дж. Буля, одного из основоположников математической логики, сын известного английского художника Э. Тейлора, племянник Э. Войнич, автора широко известного везде, а особенно в СССР, романа «Овод». Тейлору принадлежат важные результаты в области метеорологии, математики, статистической теории турбулентности, теории вращающихся жидкостей, гидродинамической устойчивости и экспериментальной гидродинамики (Тейлор, 1958–1971; Лайтхилл, 1995). Он состоял членом и Королевского научного общества, и Академии наук СССР.

М. Дж. Лайтхилл (1924–1998) получил титул сэра за разработку акустики, теории волн, теории пограничного слоя, теории течения неньютоновой жидкости, биомеханики. Его избранные научные труды изданы в виде четырёхтомника (Хюссейн, 1997).

Учёные изучают *объективно* существующие законы природы. Если бы не было ни Аристотеля, ни Ньютона, кто-либо другой рано или поздно непременно повторил бы их открытия. В искусстве же создают-

[1]Такие же особенности присущи и другой, расположенной с другой стороны евразийского материка стране — Японии, внесшей неоценимый вклад в мировое искусство (Николаева, 1996).

ся произведения, *субъективные* по своей природе. Если бы не было ни Баха, ни Достоевского, то никто бы их не заменил. Личностный вклад в искусстве проявляется рельефнее, чем в науке. Художник не открывает, а создает субъективную истину; ученый не создает, а открывает объективную истину.

А.5. Диагностика и прогностика

На большинство злободневных вопросов о будущем наук, народов и человечества научный прогноз не в состоянии дать ответ. Но это не означает, что эти вопросы не надо ставить. Прогноз будущего физики и, в частности, гидродинамики всегда актуален.

История — это модель прошлого, а прогноз — это модель будущего. Если память о предках — нравственная категория, то прогноз — количественная категория, фиксирующая соотношение исторически неизбежного и исторически случайного.

Настоящее — это мгновение $t = 0$, которое разделяет/соединяет два полубесконечных интервала: прошлое $-\infty < t < 0$ и будущее $0 < t < \infty$. На самом деле «настоящее» является не точкой, а некоторым интервалом Δt, выбор которого зависит от контекста и определяет масштаб внутреннего времени, то есть временную шкалу. Этот масштаб может быть равен и наносекунде, и тысячелетию. Слово «современность» всегда относится к процессу с выбранным внутренним временем и его шкалой.

Качественный прогноз определяет тенденции в развитии явления. *Количественный прогноз* определяет числовые характеристики явления: либо кривую $f(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_0$, либо значение f в момент времени $t = t_0$. При этом значение $f(t)$ в интервале $t_1 \leqslant t \leqslant 0$, где t_1 — момент начала процесса, считается известным. Прогноз называется асимптотическим, если $t_0 = \infty$.

Прошлое уже нельзя изменить, будущее ещё можно. Прошлое не имеет сослагательного наклонения, а будущее — повелительного. Будущее имеет много виртуальных сценариев, а прошлое — лишь одну траекторию, обозначающую уже свершившееся действо (рис. А.2 *а*). Однако в истории эта единственная траектория подвергается отнюдь не единственному толкованию. Как утверждает Б. Пастернак:

Однажды Гегель ненароком
И, вероятно, наугад
Назвал историка пророком,
Предсказывающим назад.

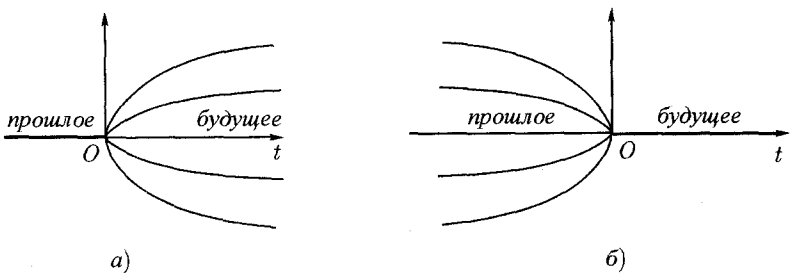


Рис. А.2. Виртуальные траектории: *а* — в прогностике; *б* — в ретроальтернавистике

Известно, что история не однолика, универсальной истории не бывает, исходный фактический материал можно трактовать различными способами.

Если прогностика — теория исследования будущего, то ретроальтернавистика — альтернативное исследование прошлого (Бестужев-Лада, 1997). Ретроальтернависты, считая всё же, что прошлое имеет сослагательное наклонение, задаются вопросом, какие варианты развития могли иметь место в прошлом, то есть в интервале времени $t_1 \leqslant t \leqslant 0$. В качестве ответа на этот вопрос появляется виртуальный пучок траекторий в этом интервале времени (рис. А.2 *б*). Таким образом, историки ищут одну «реальную» траекторию, а ретроальтернависты — семейство виртуальных траекторий. Кривая $f(t)$ в прошлом — как, впрочем, и в будущем! — теоретически разложима на 3 компоненты: стационарную, волновую и случайную. Априори весь пучок этих кривых нам неизвестен, так как прошлое представлено лишь одной траекторией. Поэтому задача ретропрогноза о нахождении всего пучка кривых оказывается не увлекательным экзерсисом, а необходимым элементом анализа.

Есть два принципиально различных процесса: *марковский* и *немарковский*. В марковском процессе будущее определяется не прошедшим, а только настоящим; процесс не обладает памятью. Предположение о марковости — это идеализация реального процесса. Примером является заочная игра в шахматы: неважно, кто из соперников какой ход сделал, значение имеет лишь существующее в данный момент внутреннего (шахматного) времени положение фигур на доске.

В рамках немарковского процесса будущее определяется не только настоящим, но и прошлым. Будущее науки — в ее прошлом. Для прогноза состояния при $t > 0$ необходимо знать не только состояние при $t = 0$,

но и состояния, предшествующие этому. Примером является игра в домино: для выбора оптимального хода необходимо знать не только достигнутую к настоящему моменту позицию, но и информацию о том, кем какой ход сделан в прошлом. Такой процесс обладает памятью. История — пример немарковского процесса, поэтому без неё нельзя понять настоящее. В зеркале истории мы ищем ответы на самые сокровенные вопросы: во имя чего живём, к чему принадлежим, какое занимаем место на оси исторического времени. Как считал Ф. Тютчев: «Нет ничего более человечного в человеке, чем потребность связывать прошлое с настоящим».

Назначение истории — не только узнавание прошлого, но и прогнозирование будущего. Прогностика — это пока еще искусство, а не наука, в настоящее время в ней господствуют гипотезы, а не математические модели (Бестужев-Лада, 2000).

При длительном эволюционном процессе наступает момент, когда система переходит в непредсказуемое состояние. Этот момент t_0 называется *горизонтом предсказуемости*. Поэтому будущее (Бетяев, 1999) состоит из прогнозируемого ($0 < t < t_0$) и непрогнозируемого ($t_0 < t < \infty$). Не следует думать, что прогноз всегда выполняется, как это было в случае с царем Эдипом или с вещим Олегом. Конкретный прогноз как виртуальная траектория лишь указывает нам на необходимость целенаправленного воздействия на события.

История наук призвана не только предсказывать великие открытия и выявлять новые проблемы, но и давать ключ к их решению, обогащая человечество опытом накопленных ошибок и достижений. Именно в этом заключается её пропедевтическое назначение[1]. Объяснение — это диагностика явления в заданный момент времени $t = 0$. Диагностика включает две задачи. В стационарном случае по условиям на границах области определяется структура явления во всей области. В нестационарном случае цель заключается в определении поведения системы при $t \to \infty$.

Прогностика — это всегда нестационарный процесс, математическую модель которого условно можно записать в виде:

$$\frac{df}{dt} = A,$$

где f — некоторое количество сущего, а A — действующие «силы».

[1]Вот как об этом говорит последовательный антиинструменталист Дойч (2001, с. 9): «Факты можно понять только после объяснения. К счастью, наши лучшие теории наряду с точными предсказаниями содержат глубокие объяснения. «...» В этих объяснениях и заключается полное содержание теории; а предсказания относительно движения планет — это всего лишь некоторые умозаключения, которые мы можем сделать из объяснения».

Хотя история науки является частью самой науки, она не разрешает проблемы, а только высвечивает их. Изучать науку в отрыве от её истории нельзя. История — это мост из прошлого через настоящее в будущее, выбор оптимального пути, механизм передачи опыта по цепи поколений, отбор ценностей.

Зарождающаяся на наших глазах прогностика — это наука наук. Её основой являются информатика, теория динамического программирования, теория катастроф, теория игр, теория случайных процессов, синергетика.

Следует различать реальный процесс $f_1(t)$, регистрируемый процесс $f_2(t)$ и модельный процесс $f_3(t)$. Траектории $f_2(t)$ измеряются приборами. Зависимость $f_3(t)$ определяется с помощью логической, математической или аналоговой модели. Если функция $f_1(t)$ определяется законами природы, то функция $f_3(t)$ — свойствами положенной в основу прогноза модели процесса.

Детерминированный процесс — лишь частный вариант стохастического процесса. Предсказание — это диагностика и прогностика временного ряда $f_2(t)$: идентификация процесса (фрактальный, случайный или детерминированный?), определение его средних характеристик, построение модели.

Научный прогноз даёт информацию не только о том, что может произойти, но и о том, что не может произойти. Вычисление прогноза сопровождается указанием его точности, выраженной вероятностными оценками. Динамический ряд представляет собой сумму детерминированной и случайной составляющих. Детерминированная составляющая отражает закономерности процесса и его основную тенденцию — *тренд*. Случайная составляющая появляется в сложных, неустойчивых по отношению к малым воздействиям системах и определяет отклонение прогноза от тренда. Дополнительный вклад в случайную компоненту вносят погрешности математической модели явления, которая не в состоянии описать все воздействующие на процесс факторы. Одни процессы предсказуемы, другие — нет.

Одни — более предсказуемы, другие — менее. Реальность расположена между двумя крайностями: полная предсказуемость (детерминизм) и полная непредсказуемость (хаос). Явление предсказуемо, если оно развивается «по инерции», без зарождения новых, неучтенных прежде факторов. Считается, что на протяжении миллиарда лет восход солнца был прогнозируемым процессом. Классический пример полностью непредсказуемого явления — бросание монеты. Рассчитать движение монеты, как в воздухе, так и после падения — по полу, практически невозможно,

задача некорректна. Поэтому выпадение орла или решки считается равновероятным.

Уравнения бывают *прогностическими* и *диагностическими*. Диагностическое уравнение описывает состояние системы в данный момент времени, поэтому не содержит временных производных. В гидродинамике таковым является уравнение неразрывности. Второе прогностическое уравнение получится, если применить операцию дивергенции к уравнению Навье – Стокса (1.3):

$$\nabla[(\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u}] = -\nabla^2 p.$$

В оба прогностических уравнения вязкие члены не входят. Таким образом, система уравнений Навье – Стокса (1.3) эквивалентна системе двух прогностических и двух диагностических уравнений.

Прогностические уравнения содержат производные по времени. Уравнения Максвелла, Больцмана и Навье – Стокса, например, содержат в явном виде первую производную по времени.

А.6. Законы физики и законы истории: сходство и различие

Подчиняется ли исторический процесс объективным законам? В дискуссии на эту тему сломано немало копий. Этот вопрос впервые поставил немецкий философ Гердер (1977). Он же выдвинул идею о единообразии исторического развития народов и цивилизаций, об объединении человечества.

В точных науках имеются законы, описывающие с той или иной погрешностью происходящие в природе процессы. Рассмотрим классификацию законов в физике — науке, где добыча законов является самоцелью.

Физические законы выражаются в математическом виде: формулы, уравнения, неравенства. Находятся они, в конечном итоге, с помощью опыта. Научный опыт проводится по семантической схеме, представленной на рисунке А.3 *а*, где С — субъект, проводящий исследование, К — кондуктор (второй субъект — проводящий исследование, экстрасенс), П — прибор, О — объект исследования. Физико-химический опыт получится, если исключить кондуктора (рис. А.3 *б*). Психологический опыт получится, если из полной схемы исключить прибор и объект (рис. А.3 *в*).

Физические законы подразделяются на следующие типы.

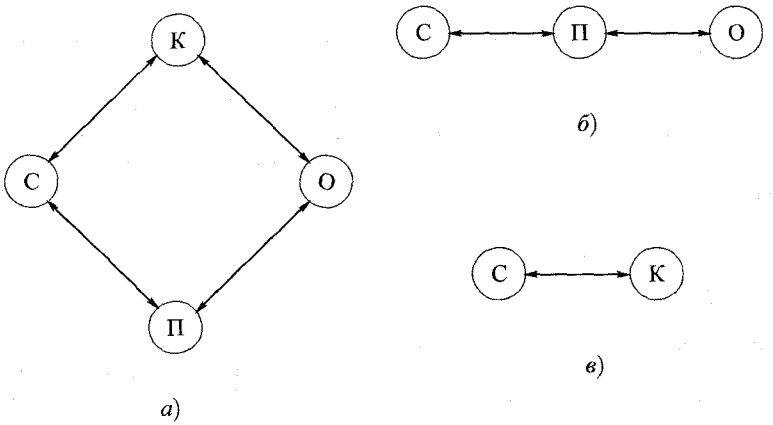


Рис. А.3. Семантические схемы научного опыта: *а* — общая схема; *б* — физико-химический опыт; *в* — психологический опыт (С — субъект, К — кондуктор, П — прибор, О — объект)

1. *Точные законы.* Такое название условно и требует пояснений. Точные законы следуют из определений или из физических принципов, непогрешимость которых положена в основу теорий: принципы механики, принцип симметрии, принцип сохранения комбинированной четности и т. д. Мах (2000, с. 201) писал: «Именно простейшие с виду принципы механики очень сложны; они основаны на незавершенных и даже недоступных полному завершению данных опыта; практически они, правда, достаточно проверены для того, чтобы, принимая во внимание достаточную устойчивость окружающей нас среды, служить основой для математической дедукции, но сами они вовсе не могут рассматриваться как математические истины, а они должны рассматриваться, напротив того, как принципы, не только способные подаваться непрерывному контролю опыта, но даже нуждающиеся в нем».

Закон эквивалентности инертной и гравитационной масс подтвержден экспериментально с точностью до 0.9×10^{-12} г.

Вот примеры точных законов, известных из школы: $E = mc^2$, $S = k \ln w$, $m = m_0(1 - u^2/c^2)^{-1/2}$, $e = \hbar\nu$. Если обнаруживается любое, даже самое незначительное нарушение физических принципов, то меняется парадигма.

2. *Приближенные законы.* Сфера их действия ограничена. Примеры: закон Клапейрона, закон Ома, закон Бернулли, закон распада ато-

мов $n = n_0 \exp(kt)$, $k < 0$, и тот же закон роста народонаселения, но справедливый при $k > 0$. Они оказывают неоценимую помощь практикам при моделировании явления.

3. *Ограничительные законы.* Ограничительные законы, подобно теореме Гёделя, отражают принципиальную непознаваемость Природы, свидетельствуют об ограниченности наших представлений о мире. Есть познанное, есть то, что будет познано, и есть то, что наука никогда не познает. Вот примеры ограничительных законов, известных без пояснений с институтской скамьи: $\Delta x \Delta p \geqslant \hbar$, $u < c$, $dS/dt \geqslant 0$. Здесь $\hbar$ — постоянная Планка, c — скорость света, S — энтропия.

4. *Асимптотические законы.* Они отражают приблизительность наших представлений об окружающем мире, выражают асимптотические соотношения между величинами α и β с помощью O- и o-оценок: $\alpha = O(\beta)$, $\alpha = o(\beta)$, $\alpha = \lim \beta$. Такой тип связей Бурбаки (1962) называет *отношением порядка*: «Другой важный тип представляют собой структуры, определенные *отношением порядка*; на этот раз это — отношение между двумя элементами x, y, которое чаще всего мы выражаем словами "x меньше или равно y". < . . . > Здесь больше не предполагается, что это соотношение однозначно определяет один из элементов x, y как функцию другого».

5. *Вероятностные законы.* Микропроцессы обычно случайны, а макропроцессы, как продукт осреднения, детерминированы.

На основе системного анализа выводятся исторические законы. Некоторые из них тривиальны, некоторые спорны, все они субъективны, так как нет и не может быть единой картины исторического процесса, которая не оценивается однозначно: позитивное всегда и нераздельно смешано с негативным, добро со злом.

«Многие историки и философы отрицают возможность нахождения общих законов в истории, ссылаясь на то, что закон предполагает наличие повторяемости, а исторические факты слишком разнообразны. Однако некоторые мыслители считали и считают, что, в принципе, можно найти такие общие законы, хотя сделать это очень нелегко. Они подчеркивают, что для этого нужно не просто обобщать те факты, которые даны как бы на поверхности исторического процесса, а проникнуть в "суть" этого процесса, в его основу, которая не осознается самими участниками. < . . . > Люди думают, что они и только они творят историю. В действительности они творят историю лишь постольку, поскольку как бы через них, через их поступки действуют некие безличные законы, о которых участники истории не имеют ни малейшего представления» (Лекторский, 2001, с. 248).

«Каждый эмпирический закон обладает тем неприятным свойством, что пределы его применимости неизвестны. Мы уже убедились в том, что закономерности в явлениях окружающего нас мира допускают формулировку с помощью математических понятий, обладающую сверхъестественной точностью. С другой стороны, в окружающем нас мире имеются и такие явления, рассматривая которые, мы не уверены, что между ними существуют какие-либо точные закономерности» (Вигнер, 2002, с. 194).

Совсем по-другому классифицирует законы Блюменфельд (2002, с. 13). «В термодинамике и статистической физике (как, впрочем, и в любой области науки) существует два типа законов. Законы первого типа называются *принципами* или *постулатами*. Они являются обобщениями экспериментов или наблюдений и не могут быть логически доказаны. Законы второго типа могут быть логически выведены из законов первого типа».

Приложение В

История теоретической гидродинамики в России

Хотя Россия позднее других развитых стран вступила на путь промышленного, а значит, и научно-технического развития (парадокс Чаадаева), на рубеже XIX–XX веков на весь мир прозвучали имена русских учёных-естествоиспытателей: Д. И. Менделеева, И. П. Павлова, И. И. Мечникова, И. М. Сеченова, А. Г. Столетова, С. П. Тимошенко и многих других. В то время гидродинамика в России пребывала в зачаточном состоянии. Отцом её по праву считается Н. Е. Жуковский (1847–1921). До него этой наукой в России занимались лишь талантливые одиночки.

В.1. Предыстория

Как уже говорилось, великий Л. Эйлер (1707–1783), член Петербургской академии наук, первым построил математическую модель течения жидкости. В его трактате «Общие принципы движения жидкости», изданном в 1755 году, уравнения движения идеальной жидкости приобрели законченную форму. К уравнениям движения он присоединил уравнение неразрывности — число уравнений стало равно числу зависимых переменных.

Ординарный профессор Казанского университета А. Ф. Попов (1815–1879), ученик Н. И. Лобачевского, исследовал волны в несжимаемой жидкости.

Ординарный профессор Казанского университета И. С. Громека (1851–1889) изучал класс движений несжимаемой жидкости, когда вихревые линии либо перпендикулярны к траекториям, либо параллельны им. Результаты его исследований, опубликованные в 1881 году в Учёных записках Казанского университета, остались неизвестными широкому кругу научных работников (Громека, 1952). Спустя 8 лет итальянский

учёный Е. Бельтрами обнародовал свою статью по данной теме. Сегодня течение с вихревыми линиями, совпадающими с траекториями, называется *течением Бельтрами*, а не *течением Громеки*. Но память о Громеке сохранилась — одна из форм уравнений движения жидкости называется уравнением Громеки – Ламба. В 1882 году Громека решил задачу о нестационарном движении вязкой жидкости в круглой цилиндрической трубе[1]. Такая же задача о стационарном движении жидкости была решена еще Навье.

Тематика научных работ Громеки была близка работам Жуковского. Они почти одновременно начали свою научную и педагогическую деятельность. Жуковский часто цитировал Громеку.

Три страсти владели Громекой — наука, шахматы и охота. Зимой 1889 года во время поездки на охоту он упал с саней, получил сильный ушиб, на месте которого впоследствии обнаружилась саркома. В этом же году он ушел из жизни. За десять лет своей творческой деятельности Громека опубликовал одиннадцать работ, каждая из которых не потеряла своего значения и в наше время.

В середине XIX века в Петербургском университете сложилась прекрасная математическая школа: П. Л. Чебышев, М. В. Остроградский, В. Я. Буняковский, А. М. Ляпунов, А. А. Марков, В. А. Стеклов, Ю. В. Сохоцкий, Д. К. Бобылёв. Многие из них занимались решением гидродинамических задач.

Бобылёв (1842–1917), учитель А. А. Фридмана, получил в замкнутой форме решение задачи о симметричном струйном обтекании клина потоком идеальной жидкости. Такое течение сегодня принято называть *течением Бобылёва*. В 1873 году он вывел формулу для диссипации энергии, спустя 7 лет А. Р. Форсайт повторил его вывод. Тем не менее она называется не формулой Бобылёва, а формулой Бобылёва – Форсайта (см. Серрин, 2001, с. 229).

Ляпунов (1857–1918) изучал фигуры равновесия равномерно вращающейся жидкости, исследовал их устойчивость, внес значительный вклад в теорию потенциала.

Остроградский (1801–1861) продолжил исследования О. Коши и С. Пуассона о распространении волн в цилиндрическом бассейне.

Имя профессора Петербургского университета Сохоцкого (1842–1927) связано с теорией краевых задач, являющейся основой теории кусочно-потенциальных течений. Трудно назвать автора, впервые ис-

[1]Прандтль неправильно приписывает решение этой задачи П. Шиманскому, который получил его спустя 48 лет (см. Дюрэнд, 1939, с. 77).

пользовавшего интеграл типа Коши. Однако можно точно указать, что первым, кто его исследовал, был Сохоцкий. В своей докторской диссертации (1873) он доказал теорему о предельных значениях интеграла типа Коши. Затем результаты Юлиана Васильевича были незаслуженно забыты и вновь получены югославским математиком И. Племели в 1908 году. Нередко и несправедливо теорему Сохоцкого называют теоремой Сохоцкого – Племели и даже — теоремой Племели.

Борис Александрович Бахметьев (1880–1951) занялся гидродинамикой уже в XX веке. Он родился в Тифлисе. Получив образование в Петербурге и Цюрихе, стал гражданским инженером. В 1912 году опубликовал монографию, посвящённую течению жидкости в открытом канале. Блестящее образование и воспитание позволили ему стать послом в США при Временном правительстве России. После Октябрьской революции эмигрировал в Америку, приобрёл там большую спичечную фабрику. Став капиталистом, продолжал занятия гидродинамикой, издал оригинальные монографии по гидравлике и динамике турбулентных течений (Бахметьев, 1939). Помогал русским эмигрантам «первой волны» обосноваться в Нью-Йорке.

В скобках заметим, что выдающийся гидродинамик, ученик Л. Прандтля Иван (Вано) Ильич Никурадзе (1894–1979) тоже родился в Грузии (Леонтьев, 2001).

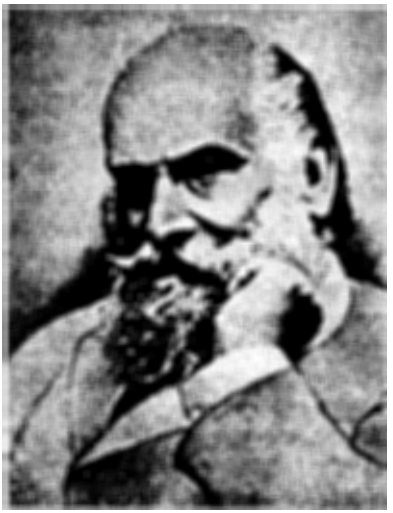
Четыре научные школы оставили нетленный след в российской гидродинамике: школа Жуковского, школа Фридмана, школа Колмогорова и школа ЦАГИ.

В.2. Школа Жуковского

В начале века теория крыла обогатилась двумя выдающимися достижениями: условием конечности скорости на задней кромке крыла и формулой, устанавливающей прямую пропорциональность между действующей на крыло подъёмной силой и циркуляцией скорости. К обоим этим достижениям причастны и Жуковский, и известный немецкий математик, приват-доцент Высшей технической школы в немецком городе Штутгарте В. М. Кутта (1867–1944).

Имя ученика Жуковского С. А. Чаплыгина стали связывать с этими открытиями в 40-х годах прошлого века, когда в стране развернулась кампания по борьбе с так называемым космополитизмом — попыткой доказать, что «Россия является родиной слонов».

Число Маха[1], например, предлагали называть числом Майевского[2], а условие о конечной скорости на клиновидной кромке — условием Чаплыгина или даже условием Чаплыгина – Жуковского – Кутта. На самом деле, Чаплыгин лишь обобщил результаты, полученные Жуковским и Кутта. Кутта первым указал на условие конечности скорости, но его результат относился к частному случаю обтекания дужки. Кутта первым получил формулу для подъёмной силы, но опять же в частном случае дужки и совсем не в той изящной форме, которую впоследствии обнаружил Жуковский: подъёмная сила равна произведению скорости движения крыла на циркуляцию и на плотность воздуха.



Н. Е. Жуковский (1847–1921)

Терминологию изменить трудно, это подвластно только авторам хороших учебников. Но статистика показывает, что в настоящее время условие о конечности скорости называют условием Кутты, а теорему о подъёмной силе — теоремой Жуковского. Намечается компромиссное разделение.

Формула Жуковского оказалась универсальной: она не только определяла действующую на крыловой профиль подъёмную силу, но и объясняла движение в потоке вращающегося цилиндра — так называемый эффект Магнуса. Одной этой формулы оказалось бы достаточно, чтобы имя Жуковского навечно вошло в анналы гидродинамики.

[1]*Число Маха использовал ещё Эйлер. А ввел его в употребление не сам Мах,* а Я. Аккерет. Кстати говоря, термин «число Рейнольдса» ввел не сам Рейнольдс, а известный физик А. Зоммерфельд спустя много лет после исследований Рейнольдса.

[2]Генерал Н. В. Майевский (1823–1892) был выдающимся специалистом по баллистике (Космодемьянский, 1982). Европейцы учились по учебнику Майевского. Недаром в предисловии к его французскому изданию генерал Морен писал: «В своих обширных и трудных изысканиях, всегда руководимый научными началами и освещенный результатами опытов, генерал Майевский не только обнаружил крайне глубокие познания и в высшей степени философский ум, но, кроме того, выказал в отношении всех ученых, посвятивших себя тем же занятиям, чувство справедливости и беспристрастия, приносящее столько же чести его характеру, сколько труды его приносят чести его таланту». Впоследствии баллистика стала составной частью динамики полета — прикладной авиационной науки.

Своим учителем Жуковский считал Гельмгольца. «Современная аэродинамика, — говорил он, — своим развитием обязана Гельмгольцу».

Среди учеников Жуковского неизгладимый след в гидродинамике оставили Д. П. Рябушинский и С. А. Чаплыгин. В 1902 году Жуковский построил аэродинамическую трубу всасывающего типа с закрытой рабочей частью в Московском университете. Длина её равнялась 7 метрам. К этому времени стало ясно, что для повышения точности опытов нужны большие трубы, дорогое приборное оборудование и, следовательно, значительные материальные затраты. В университете денег не было. На помощь пришёл богатый российский предприниматель Дмитрий Павлович Рябушинский (1882–1962), создавший в 1904 году в Кучино, родовом подмосковном имении, первый в мире аэродинамический институт. Рябушинский был одним из младших отпрысков владельца крупнейшей российской торгово-промышленной фирмы «Товарищество П. М. Рябушинского с сыновьями». Он успешно окончил Практическую академию коммерческих наук в Москве, где механику преподавал «отец русской гидродинамики» Жуковский. Выбрав науку целью своей жизни, Рябушинский в тридцатилетнем возрасте с отличием заканчивает второй ВУЗ — физмат Московского университета — и остаётся там работать на кафедре Жуковского (см. Борисов, 2000). Его первая научная статья посвящается теории полёта геликоптера.

Аэродинамический институт в Кучино был предтечей ЦАГИ. Эксперименты проводились на самом высоком по тем временам инженерном уровне. Использовалось, например, такое новшество в тогдашней мировой практике, как фотографирование. В Кучино было построено прекрасное здание и смонтирована по тем представлениям большая аэродинамическая труба длиной в 14 метров. Научным руководителем Рябушинский пригласил своего учителя Жуковского. В центре внимания было измерение сил, действующих на погруженное в поток тело. «Отец русской авиации» И. И. Сикорский назвал Кучинскую лабораторию «славным гнездом авиационной науки».

Вскоре отношения между учеником и учителем испортились. Вот как описывает ссору Жуковского с Рябушинским, этим «матёрым финансовым волком», «дельцом с размахом», М. Арлазоров, автор книги «Жуковский» (серия «Жизнь замечательных людей», 1959): «Но не прошло и года, как из просителя и почитателя Рябушинский превратился в повелителя. Он ревновал Жуковского к его славе и попытался диктовать ему свои условия». Хотя неправомерно судить прошлое с позиций современности, следует отметить, что Жуковский проявил излишнюю принципи-

альность. Характер у него был нелёгкий. А не ревнуют только слабые... После революции 1917 года институт Рябушинского конфисковали. Самого Дмитрия Павловича арестовали. Только благодаря помощи друзей ему удалось выйти из тюрьмы и бежать за границу[1]. Комиссия в составе Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина и других признала институт пригодным для проведения аэрофизических исследований. Явившийся прообразом ЦАГИ Кучинский институт просуществовал до 1921 года, после чего был передан геофизикам.

Рябушинский эмигрировал во Францию, где стал заведующим аэродинамической лаборатории Сорбонны. Он сочетал в себе незаурядный талант учёного, инженера и даже писателя.

Дмитрий Павлович в 1919 году предложил симметричную схему кавитационного обтекания тел в случае положительного числа кавитации, которая вошла в литературу под названием «зеркало Рябушинского» и сегодня известна любому гидродинамику; установил аналогию между дифференциальными уравнениями теории мелкой воды и уравнениями газовой динамики.

Выдающийся русский учёный и инженер, член-корреспондент Французской академии Рябушинский известен не только своими неувядаемыми трудами в области гидродинамики, но и изобретением теплового проволочного анемометра, до настоящего времени незаменимого в аэрогидродинамическом эксперименте. В 1916 году он предложил оригинальное оружие — реактивный ручной гранатомёт, названный впоследствии базукой, и безуспешно пытался его пропагандировать. Лишь спустя четверть века базука была принята на вооружение в армиях США и некоторых других стран.

Основополагающий вклад сделан Рябушинским в теорию размерности: полученное им в 1911 году доказательство, обобщённое впоследствии английским учёным Р. Бакингемом и названное «π-теоремой», вошло во все учебники по механике сплошных сред. Он внёс значимый вклад в теорию волн и в исследование кавитационных течений. Хотя две сотни написанных Рябушинским трудов трудны для изучения, они до сих пор привлекают внимание исследователей.

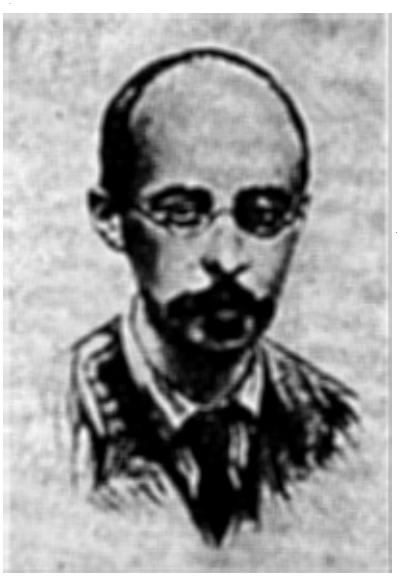
Признание научных заслуг Рябушинского проявилось в избрании его член-корреспондентом Французской академии наук. Память о великом русском учёном увековечена — его имя, вернувшееся к нам из длительного забвения в годы коммунизма, занесено в Золотую книгу русской эмиграции (Русское зарубежье, 1997).

[1]Всех сестёр освободить не удалось — они погибли в концентрационном лагере на Соловецких островах.

Еще одним известным учеником Жуковского[1] был Стефан Джевицкий (1844–1938), инженер и ученый польского происхождения. Он тоже эмигрировал во Францию, где работал с Эйфелем; внес значительный вклад в теорию воздушного винта.

Среди научных работ другого ученика Жуковского есть одна, которая занимает исключительное место. Это опубликованная в 1902 году докторская диссертация Чаплыгина (см. Чаплыгин, 1972). К этому времени уже были открыты ударные волны, но газовая динамика всё ещё не обозначилась как наука. Диссертация Сергея Алексеевича ознаменовала её рождение. Прочно вошли в научный обиход такие понятия, как «газ Чаплыгина», «уравнение Чаплыгина».

В.3. Школа Фридмана



А. А. Фридман (1888–1925)

В школе Жуковского занимались теорией волн, ударом тел о свободную поверхность, нестационарными течениями идеальной жидкости, теорией подводного крыла, глиссированием. Как вспоминает Л. Г. Лойцянский (1998), Жуковский и его ученики оставались в стороне от новых научных направлений — от изучения динамики вязкой жидкости.

Совсем другие принципы легли в основу деятельности школы Фридмана. В отличие от школы Жуковского, где создавались отечественные авиационные науки, ученики Фридмана шли к гидродинамике не от авиационных приложений, а от геофизики. А. А. Фридман (1888–1925) поражает воображение широтой своих интересов. Его модель расширяющейся Вселенной сначала отверг, а затем поддержал А. Эйнштейн. Вторая страсть

[1] К обширной школе Жуковского принадлежали и инженеры (В. П. Ветчинкин, Б. С. Стечкин) и авиаконструкторы (Г. М. Мусинянц, А. Н. Туполев, А. М. Черемухин, Б. Н. Юрьев).

Фридмана — динамическая метеорология, основателем которой он является. Выведенные им теоремы и уравнения приобрели фундаментальное значение в прогнозировании погоды. С 1920 года Александр Александрович начал работать в Главной физической обсерватории Санкт-Петербурга. Третье увлечение Фридмана — гидродинамика. Он интересовался самой фундаментальной проблемой гидродинамики — турбулентностью. Как уже говорилось, совместно с Л. В. Келлером он строго математически вывел бесконечную систему уравнений для моментов (Фридман, 1976; Монин и др., 1989).

В честь Фридмана назван один из кратеров на поверхности Луны.

После преждевременной смерти Фридмана от брюшного тифа главой петербургской гидродинамической школы стал его ученик Н. Е. Кочин. Он занимался моделированием циклона (1923), исследованиями поверхностей разрыва (1924), волновых движений тяжёлой жидкости, устойчивостью вихрей. Получил точное решение линейной задачи об обтекании кругового крыла в плане (1940) независимо от известного немецкого гидродинамика К. Кринеса, который получил решение в более общем случае — для эллиптического крыла. На учебниках Кочина выросло не одно поколение гидродинамиков в России. Его переезд в Москву и работа в ЦАГИ ознаменовали собой преемственность гидродинамических школ Фридмана и ЦАГИ.

Л. Г. Лойцянский, другой ученик Фридмана, занимался разработкой теории ламинарных течений, а в теории турбулентности обнаружил инвариант (1939), сохраняющийся в процессе вырождения однородной и изотропной турбулентности. Правда, впоследствии выяснилось, что этот результат справедлив лишь в специальном случае (Монин, Яглом, 1992).

В.4. Школа Колмогорова

А. Н. Колмогорову (1903–1987) принадлежат фундаментальные открытия во многих областях математики, роль его в истории гидродинамики уникальна, ибо он является центральной фигурой среди разработчиков теории турбулентности. Специалистам хорошо известны масштаб Колмогорова, гипотезы Колмогорова, дискуссия Колмогоров – Ландау, а в нелинейной динамике — «теория Колмогорова – Арнольда – Мозера».

Ни один гидродинамик еще не становился лауреатом Нобелевской премии. Вклад Колмогорова в теорию турбулентности достоин этой престижной премии. Этот вопрос поднял И. Пригожин, но слишком поздно —

А. Н. Колмогоров (1903–1987)

Андрей Николаевич через несколько месяцев скончался[1].

Колмогоров в 1983 году шутливо говорил, что один из его учеников управляет атмосферой, а другой — океанами. Он имел в виду директора Института физики атмосферы АН СССР академика А. М. Обухова и директора Института океанологии АН СССР, член-корреспондента А. С. Монина (Тихомиров, 1999). Институт физики атмосферы был основан на базе возглавляемой ранее Колмогоровым лаборатории по исследованию турбулентности.

Разложение спектра пульсаций скорости на низкочастотную и высокочастотную часть называется разложением Обухова. Закон Колмогорова – Обухова Обухов вывел независимо от Колмогорова, исходя из других соображений. Им также предложена логнормальная структура флуктуаций.

Монин обобщил уравнение Кармана – Ховарта на случай анизотропной турбулентности. Теперь оно называется уравнением Кармана – Ховарта – Монина.

А. М. Яглом, развивая теорию Колмогорова, рассмотрел общий класс моделей случайного каскада. Его брат-близнец И. М. Яглом стал известным математиком (Яглом, 1980).

М. Д. Миллионщиков выдвинул гипотезу о зануленении семиинварианта четвёртого порядка. Лишь спустя 7 лет эту же идею высказал В. Гейзенберг. «Закон минус 5/4», или «закон Миллионщикова», определяет затухание пульсаций скорости со временем.

В. И. Арнольд исследовал устойчивость стационарных течений идеальной жидкости; с помощью теории групп Ли он обнаружил, что

[1]Российские ученые обделены Нобелевскими премиями. По мнению того же Пригожина, звания нобелиатов заслуживали также Г. А. Гамов, Н. Н. Боголюбов, Я. Б. Зельдович, А. М. Жаботинский. Время показало, что присуждение им Нобелевских премий было бы справедливым актом признания заслуг этих гениальных ученых.

такое течение суть бесконечномерный аналог вращения твёрдого тела.

Г. И. Баренблатт внес весомый вклад в теорию автомодельных течений и в теорию турбулентности. Школе Колмогорова была присуща глубина и математическая строгость. В 1930–40-е годы возглавляемая Колмогоровым российская математическая школа, как считают историки науки, была лидирующей в мире. Сработало правило «классной доски»: успехи у русских учёных имеются там, где не требуется более сложных инструментов, чем мел и доска[1].

В.5. Школа ЦАГИ

Школа ЦАГИ стала естественным продолжением школы Жуковского. ЦАГИ была отведена главная роль в создании советской (передовой в свое время) авиации, и он ее достойно выполнил. В СССР ни один новый самолет не мог подняться в воздух без «разрешения» ЦАГИ. Здесь не было единоличного лидера, поэтому образовались самостоятельные *подшколы*.

По вертикали физику принято подразделять на метафизику (философию), представителями[2] которой были Аристотель, Г. Галилей, И. Ньютон, Э. Мах, А. Пуанкаре и др., теоретическую физику, представителями которой были Дж. Стокс, Дж. К. Максвелл, Л. Больцман, М. Планк, Н. Бор, А. Эйнштейн, Л. Д. Ландау и др., и прикладную физику, представителями которой были М. Фарадей, Г. Герц, Р. Гук, Л. Прандтль и др.

В ВПК образовался озоновый слой теоретиков, по тем или иным причинам не устроившихся в институты Академии наук. В ЦАГИ творили такие выдающиеся теоретики, как С. А. Чаплыгин, Н. Е. Кочин, Л. Г. Лойцянский, Ф. И. Франкль, А. А. Никольский, В. В. Сычев, В. Я. Нейланд.

Однако костяк ВПК составляли инженеры. К концу XX века слово «инженер» померкло. В научных институтах российского военно-промышленного комплекса должность научного сотрудника стала считать-

[1] Всё дело заключается в образовании. Об этом знал ещё Ф. М. Достоевский: «Там, где образование начиналось с техники (у нас реформа Петра), никогда не появлялось Аристотелей. Напротив, замечалось необычайное суживание и скудость мысли. Там же, где начиналось с Аристотеля (Renaissance, XV век), тотчас же дело сопровождалось великими техническими открытиями (книгопечатание, порох) «...» и расширением человеческой мысли (открытие Америки, реформация, открытия астрономические и проч.)».

[2] Эти списки ученых субъективны. Стандартного списка выдающихся ученых составить нельзя, ибо у каждого исследователя он свой.

ся более престижной, чем должность инженера. А ещё в начале века и А. Н. Крылов, и С. П. Тимошенко гордились высоким званием инженера! Ведь слово «инженер» имеет общий корень со словом «гений».

Чёткого разграничения между понятиями инженер-исследователь и ученый, разумеется, нет. Учёный занимается научными задачами, инженер — техническими. Учёный пишет статьи, инженер — отчёты. Учёный имеет индекс цитирования[1], инженер — нет. С другой стороны, деятельность инженера отлична от деятельности конструктора или изобретателя. Конструктор создаёт облик изделия, его техническую документацию. Изобретатель предлагает новые решения технических задач, имеет авторские свидетельства или патенты.

Дополнительная путаница вызвана тем обстоятельством, что инженеры бывают трех видов. Инженер-исследователь, работающий в НИИ, занимается аэродинамическим экспериментом, инженер-проектант, работающий в КБ, занимается аэродинамическим проектированием, инженер-производственник, работающий на заводе, занимается постройкой летательных аппаратов. Зачастую инженер совмещает свою деятельность с изобретательством.

Мы будем говорить об инженерах-исследователях. Граница между сферами деятельности инженера-исследователя и прикладного учёного не обозначена, размыта. Так, генеральный конструктор В. Н. Челомей[2] был достаточно крупным учёным. В ЦАГИ в 1920–30-х годах работали такие известные авиаинженеры, как В. Н. Беляев, Г. М. Мусинянц, И. В. Остославский, Ю. А. Победоносцев, А. Б. Рисберг, Б. С. Стечкин, А. В. Чесалов, Б. Н. Юрьев. В 1940–50-х годах на смену им пришли П. П. Красильщиков, Г. Л. Гродзовский, К. П. Петров, Я. М. Серебрийский, К. К. Федяевский, а в 1960-х — В. Г. Микеладзе, В. М. Фомин (см. Бетяев, 2003). Из вычислителей следует отметить В. П. Колгана, А. Н. Минайлоса и И. В. Петухова (см. Минайлос, 2001).

Наконец, среди творческих работников ВПК образовалась прослойка прикладных ученых — тех, кто были и выдающимися учеными, и выдающимися инженерами, то есть владели и теоретическими, и экспериментальными методиками. Как уже отмечалось, недосягаемым при-

[1]Вот (подсчитанные мной приблизительно) *дробные* индексы публикаций некоторых российских ученых: Н. Е. Жуковский — 98.5, С. А. Чаплыгин — 27, А. А. Фридман — 32, Н. Е. Кочин — 15, М. В. Келдыш — 21, С. А. Христианович — 11.2, Ф. И. Франкль — 36.3, В. В. Струминский — 15.4, А. А. Никольский — 26.8. Дробный индекс учитывает наличие соавторов: каждая статья оценивается в $1/N$ очков, где N — число авторов. Учитываются только статьи, опубликованные в *рецензируемых* журналах.

[2]Челомей шутил, что С. П. Королев знак интеграла пишет наоборот (Голованов, 1994).

мером для прикладных ученых стала деятельность Н. Е. Жуковского и Д. П. Рябушинского. В ЦАГИ работали такие выдающиеся прикладные ученые, как С. А. Христианович и В. В. Струминский.

Во второй половине прошлого столетия в ЦАГИ пришло новое поколение квалифицированных специалистов. Изменилась техника аэродинамического эксперимента, который стал комплексным, сочетающим трубный, натурный и компьютерный подходы. Расширилась тематика исследований.

Локальную асимтотическую теорию отрыва пограничного слоя в несжимаемой жидкости[1] построил В. В. Сычев в 1972 году (см. Сычев, 1987). А. М. Гайфуллин и А. В. Зубцов получили асимптотические решения задач о структуре спирального разрыва в слабовязкой жидкости и о диффузии пары точечных вихрей, имеющих одинаковую по величине, но противоположную по знаку циркуляцию (Гайфуллин, Зубцов, 1984). В отличие от школ Фридмана и Колмогорова в школе ЦАГИ почти не занимались исследованием самой актуальной проблемы гидродинамики — турбулентностью. Можно выделить только В. И. Пономарёва, который показал, что асимптотическая структура турбулентного пограничного слоя трехслойная (Пономарёв, 1975).

В.5.1. С. А. Христианович

Насколько справедливо утверждение, что все русские писатели вышли из гоголевской «Шинели», настолько справедливо, что все русские авиаинженеры вышли из статьи Христиановича «О сверхзвуковых течениях газа», изданной в 1941 году. Она явилась предтечей всемирно известной работы Г. И. Таганова и А. А. Никольского (см. ниже), а для Ф. И. Франкля в 1945 году послужила основой для вывода уравнения трансзвуковых течений в плоскости годографа.

Жизнь

Сергей Алексеевич Христианович (1908–2001) работал в ЦАГИ с 1937 по 1953 год. Вот как он рассказал о своей молодости в одном из интервью.

---

[1] Сначала локальную теорию отрыва пограничного слоя построили для сверхзвуковых течений. Это сделали В. Я. Нейланд (1969), К. Стюартсон и П. Ж. Вилльямс (1969). В окрестности точки отрыва течение асимптотически разделялось на три зоны. Такое асимптотическое расслоение называют трехслойным или трехпалубным. По-английски: triple-deck.

Явление трехслойного взаимодействия пограничного слоя с потенциальным течением в несжимаемой жидкости впервые было обнаружено в 1969–70-х годах сразу в работах Стюартсона и Месситера (см. Сычев, 1987).

С. А. Христианович (1908–2001)

«Происхождение у меня "неважное" — дворянское. Мои родители были дворянами, помещиками Орловской области. Наше поместье Юшино располагалось недалеко от станции Нарышкино. Мой дед Сергей Сергеевич Христианович был известным музыкантом и композитором. О нём очень тепло отзывался выдающийся певец Л. В. Собинов. Кроме того, он был председателем Орловской казённой палаты. Наша семья вынуждена была бежать на юг. И вот в Ростове-на-Дону все мои близкие — мать, отец, старшая сестра — умерли от тифа в одночасье. Я остался совершенно один, беспризорником бегал по снегу босиком. Повезло мне случайно. Мне помог профессор Давид Иванович Иловайский. Он заставил меня бросить торговать и поступить в мореходное училище. Однако там я не доучился, так как списался с тёткой, которая жила в Ленинграде, и отправился к ней на каникулы. В Ленинграде я тяжело заболел сыпным тифом и остался в этом городе на много лет. Окончил Ленинградский государственный университет и попал в очень хороший коллектив — в гидрологический институт. Затем приехал по приглашению в Москву, в Академию наук, а моих сослуживцев, как я потом узнал, всех расстреляли. Ездил в геологическую экспедицию в Среднюю Азию. Не скажу точно, какую я там пользу приносил, но практика была для меня великая. Я увидел, как ведутся исследования, замеры, проектирование, как работают гидрогеологи. Невероятно интересно было в этих местах.»

Христианович стал учителем В. В. Струминского после того, как последний пришел на работу в ЦАГИ и занялся аэродинамическим экспериментом. Струминский быстро набирал силу, и вот наступил момент, когда генеральные конструкторы стали общаться не с Христиановичем, а напрямую с ним. Так ученик обходит учителя... О дальнейших событиях вот как рассказывает Христианович.

— Почему я ушёл из ЦАГИ? Потому, что там стало неладно. Боялся, что уже не нужен. Я привык, что ко мне в ЦАГИ относились уважитель-

но. Начальником в то время был А. И. Макаревский — человек мягкий и ни во что не вмешивающийся. Мне так прямо в лицо и сказали, что надобности во мне нет, ибо труба работает, все необходимые испытания пройдены.

— Моему уходу посодействовала и ещё одна неприятная история. Меня подставили, обвинив в краже секретного документа — докладной записки о самолёте-снаряде, который бы достигал Америку. Об этом доложили Сталину, и он, спросив, кто написал, заключил, — зачем же ему красть, если он сам её и написал.

О том, что у Сах'а — так, по инициалам[1], его звали коллеги и подчиненные — научная и инженерная деятельности сбалансированы, наглядно свидетельствует и тот исключительный факт, что в 1938 году он защитил сразу две докторские диссертации: по физико-математическим и по техническим наукам.

Время

В 1930-х годах свершилась так называемая первая кадровая революция в ВПК: поколение дореволюционных ученых, людей высоконравственных и культурных, сменилось на поколение «красной профессуры». Еще до этого Ленин, обозвав интеллигенцию говном, приступил к её тотальному уничтожению. Так началось истребление великороссов.

В связи с амбициозными планами построения индустриального государства России требовались грамотные специалисты. В результате кадровой революции началось производство, а лучше сказать — перепроизводство инженеров. Для полуграмотных рабочих и крестьян в учебных институтах организовали специальные факультеты, так называемые *рабфаки*. Обучение там велось *бригадным методом* — за всю группу студентов (бригаду) отвечал один студент. Он же — один! — учил материал.

Смена поколений была необходима, так как в то время во многих областях знаний появились новые парадигмы, произошли научные революции. Россия не обеднела талантами — они появлялись столь же часто. «Красная профессура» выдвинула не только много талантливых и даже гениальных ученых, но и много бездарностей. Из-за массовости производства специалистов снизился уровень общения, уровень научного диспута. У *старорежимных интеллигентов* не было суеты. В парках

[1]Такая аббревиатура в авиации имеет еще один смысл: САХ — средняя аэродинамическая хорда. Чаплыгина за глаза тоже величали по инициалам — САЧ.

звучала духовая музыка. Мужчины носили галстуки, женщины — жабо. Никто не толкался и не ругался матом.

В итоге первой кадровой революции *буржуазная интеллигенция* сменилась *пролетарской интеллигенцией*.

Из-за усилившейся секретности и обстановки страха перед развернувшимися в стране массовыми репрессиями атмосфера в научных институтах в 1930-х годах стала гнетущей. Люди боялись общаться, разговаривать, приглашать в гости. Началось всеобщее *стукачество*: не успеешь написать донос на соседа, как он напишет его на тебя. В ожидании приезда «черных марусь» (чекистских автомашин) многие держали наготове чемоданчик с необходимыми в заключении «вещами».

Вот как описывает предвоенную обстановку в ЦАГИ генеральный авиаконструктор А. С. Яковлев в своей книге «Цель жизни» (М.: Республика, 2000): «... в ведении главка... находилось ЦАГИ, где положение тогда было плачевное. Создавалось впечатление, что вершителями всех дел в этом основном научном центре нашей авиации являлись не научные руководители, а мелкие администраторы. Научных сотрудников института лишили свободного общения между лабораториями. Пропускную систему довели до абсурда... Иные научные сотрудники... занимались в основном никому не нужными диссертациями и зарабатывали себе ученые степени».

Творчество

Христианович является автором и соавтором 5 монографий (Христианович, 1998; 2000). Круг его инженерных интересов был необычайно широк. Во время войны он занимался баллистикой реактивных снарядов.

В послевоенный период перед ЦАГИ встала задача создания сверхзвуковой авиации. Для этого требовалось построить новую экспериментальную базу. Христианович строит аэродинамические трубы больших скоростей: в дозвуковой трубе Т-106, введенной в эксплуатацию в 1943 году, до сих пор проводятся эксперименты. В трубе Т-112, построенной в 1946 году, группой инженеров под руководством Христиановича впервые была использована перфорация. Сначала скорость звука была достигнута в настольной аэродинамической трубе. Случилось это в марте 1945 года, незадолго до победы над фашизмом.

Христианович поддержал и развил идею использования эжекторов в газосборных сетях, которая позволила выкачивать газ из низконапорной скважины под давлением высоконапорного газа.

Газовая динамика. Сах создал метод расчета неустановившегося движения в каналах и реках. Развитый при этом метод характеристик

затем широко использовался им в газовой динамике и в теории пластичности.

Сергей Алексеевич дал классификацию сверхзвуковых течений, поставил задачу о переходе через скорость звука, вывел критерий разрушения потенциального течения и образования ударной волны. Предложенный им итерационный метод расчета сверхзвуковых и трансзвуковых течений имеет лишь историческое значение, в настоящее время полные уравнения газовой динамики или нелинейные трансзвуковые уравнения легко рассчитываются численно.

Расчет элементов аэродинамических труб. Сопло Лаваля, эжектор и винт, работу которых исследовал Христианович, являются важными элементами аэродинамических труб и, кроме того, имеют другие многочисленные применения в технике.

Работа Саха совместно с его коллегами А. Астровым, Л. Левиным и И. Павловым о расчете трансзвукового течения в сопле Лаваля была пионерской (см. Шифрин, 2001). Авторы выдвинули постулат о замыкании дозвукового течения в струе прямой линией перехода, являющейся одновременно характеристикой газодинамических уравнений. Этот постулат впоследствии строго доказал Л. В. Овсянников.

Сергей Алексеевич создал гидравлическую (одномерную) теорию газового эжектора. Для этого он использовал законы сохранения массы, импульса и энергии между входным и выходным сечениями камеры смешения. Такой подход не позволяет учесть турбулентные при больших перепадах давления процессы смешения газов, поэтому с его помощью нельзя определить, например, длину камеры смешения. Однако он до сих пор остается эффективным инженерным методом расчета эжекторов.

Работы Христиановича по теории газового эжектора были продолжены многими учеными. В частности, М. Д. Миллионщиков и Г. М. Рябинков обнаружили явление «запирания» эжектора — достижения скорости звука в высоконапорной струе.

Совместно с Л. А. Симоновым Сах исследовал влияние сжимаемости воздуха на индуктивные скорости винта с конечным и бесконечным числом лопастей, используя свойственную задаче «винтовую симметрию». Было установлено, что индуктивные скорости в потоке сжимаемого газа при дозвуковых скоростях остаются теми же, что и в потоке несжимаемой жидкости. Такой подход вызвал полемику в научном сообществе. Ф. И. Франкль отметил, что такой подход останется приближенным, пока не будет доказана теорема о сходящей с конца лопасти полубесконечной вихревой нити.

Теория коротких волн. Совместно со своими учениками, выпускниками МФТИ (Б. И. Заславским, О. С. Рыжовым, А. Г. Рябининым) Сах разработал асимптотическую теорию коротких волн — слабых волн с большими градиентами давления, сосредоточенными в малой окрестности фронта ударной волны. Такая теория существенно нелинейна и восходит к известной статье нобелиата Л. Д. Ландау, посвященной затуханию ударных волн.

Были получены законы распространения коротких волн и их отражения от свободной поверхности и от твердой стенки.

Теории пластичности и трещин. Христианович предложил новую теорию пластичности при сложном напряженном состоянии материала. Им решена задача о распределении напряжений в пластической зоне вокруг отверстия. Совместно с Г. И. Баренблаттом им предложена математическая модель теории трещин, основанная на условии конечности напряжений и плавности смыкания берегов трещины в ее вершине.

Математическое моделирование природных процессов. Исследование природных процессов включало построение математических моделей в речной гидравлике, в задачах фильтрации грунтовых вод и нефти, при гидравлическом разрыве нефтяного пласта и при обрушении кровли горных выработок.

В.5.2. Ф. И. Франкль

Имя выдающегося гидродинамика Феликса Исидоровича Франкля незаслуженно подзабыто, хотя специалисты знают, насколько велик его *индекс цитирования*. Он счастливо избежал репрессий и со стороны фашистов, и со стороны коммунистов.

Жизнь

Франкль (1905–1961) родился в Австрии в богатой еврейской семье, в 1927 году окончил математический факультет Венского университета. Сначала он был убеждённым коммунистом, со студенческих лет принимал активное участие в международном рабочем движении, в 1928 году вступил в коммунистическую партию Австрии. Неизвестно, убегал ли Франкль от нарождавшегося фашизма, но в 1929 году (Гитлер пришёл к власти в 1933 году) он эмигрирует в СССР и в должности научного сотрудника поступает на работу в Коммунистическую академию при Центральном исполнительном комитете СССР. Быстро сообразив, что не туда попал, через два года он переходит на работу в Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ). Здесь становится членом всесоюзной коммунистической партии. Самый главный этап научной деятельности

Франкля связан с ЦАГИ. Среди его соавторов были такие выдающиеся учёные, как С. А. Христианович, И. А. Кибель, М. В. Келдыш.

В 1944 году Франкль переходит на работу в Артиллерийскую академию им. Дзержинского, где продолжает заниматься газовой динамикой: сверхзвуковым обтеканием удлинённых тел вращения, течением в соплах и истечением сверхзвуковых струй.

По-видимому, спасаясь от преследования евреев, Франкль в 1951 году переехал в город Фрунзе (ныне — Бишкек), возглавив кафедру в Киргизском государственном университете.

В 1959 году Франкль уже работает в Кабардино-Балкарском государственном университете (г. Нальчик). Здесь, как и в Киргизии, развивает бурную педагогическую деятельность — под его руководством защищаются десятки кандидатских диссертаций.

Ф. И. Франкль (1905–1961)

Обладая феноменальной памятью, Франкль говорил на многих европейских языках. Быстро выучил русский, наизусть декламировал «Слово о полку Игореве». Свободно читал оригинальные труды Эйлера, выходившие в то время на латинском языке, и был крупным знатоком его работ.

Смерть Франкля в самом расцвете сил явилась тяжёлой утратой для мировой науки. Личный архив Франкля не сохранился. В музеях о нем нет сведений. Неизвестно, остались ли его родственники в Австрии.

Время

Придя к власти, фашисты начали геноцид по отношению к евреям и другим «неарийским» нациям. Сама наука стала «арийской»[1]. В 1920 году возникла так называемая «антиэйнштейновская лига». Ее

[1] «Еврейскими» считались теоретические науки: марксизм, теоретическая физика и пр. Основным инструментарием физики считался эксперимент. Физика германская противопоставлялась всем «неарийским физикам».

возглавили не профаны в науке, а два нобелевских лауреата — физики Ленард и Штарк. За голову Эйнштейна предлагали 50 тысяч марок. Корифеями наук немцы официально признавали «своих»: в математике — Гильберта, в физике — Планка. Разделение учёных на чистых (арийских) и нечистых (неарийских) внедрялось в сознание немцев не только фюрерами, но и учёными-нацистами. Математик Бибербах, например, писал, что остроумные результаты *неарийца* Лагранжа являются позором математики и обусловлены строением его орлиного носа. А вот труды Вейерштрасса — это высокая наука потому, что он ариец с прямым носом.

Понимая, что к каждому слову великого Гильберта прислушиваются учёные всего мира, фашисты предложили ему сделать доклад «Национал-социализм и математика» на публичном заседании Берлинской академии наук. Доклад Гильберта был предельно кратким: «Говорят, что национал-социализм и математика враждебны друг другу. Это вздор: они просто ничего общего между собой не имеют».

Находясь за рубежом, трудно было понять, что социализм в СССР — это жестокая диктатура. Многие видные зарубежные деятели за внешним фасадом социализма не могли разглядеть его красно-кровавую сущность. К их числу относился и Франкль в то время, когда выбрал СССР своей второй родиной.

Преследование евреев в СССР началось в 1930-е годы, когда Сталин решил уничтожить большевиков — так называемую «ленинскую гвардию», состоящую, в основном, из евреев. Вторая волна антисемитизма началась в конце 1940-х годов под видом борьбы с *буржуазным космополитизмом*. Невольным свидетелем этого был Франкль. Весной 1950 года комиссия Центрального комитета партии проверила ЦАГИ на предмет наличия лиц, имеющих родственников за границей. Выводы комиссии: «На ряде важнейших участков находятся люди, которых по политическим соображениям следовало бы заменить. Они группируют вокруг себя лиц одной национальности, насаждают нравы восхваления друг друга, создавая ложное мнение о своей незаменимости». Далее прилагался список из 60 «безродных космополитов», которых следовало уволить из ЦАГИ. Среди уволенных были такие видные ученые, как Л. М. Левин, С. М. Горлин и И. И. Слезингер.

Творчество

Как стареют научные статьи? Предаётся забвению мелкое, частное. Совершенствуются математические модели, численные и экспе-

риментальные методики. Остаются идеи, парадигмы, *аромат времени*.

Франкль, как, впрочем, Ландау и другие их выдающиеся современники, не могли знать те методы теории возмущений, которые были разработаны во второй половине прошлого столетия и сегодня во многом определяют лицо гидродинамики. Они не владели вычислительными методами, ибо тогда ещё не было компьютеров. С учётом этого читать статьи старых мастеров следует выборочно, пропуская то, что не выдержало испытание временем. Так, оказались невостребованными работы Франкля по общей топологии и по квантовой динамике.

Его исследования отличаются математической строгостью, порой он формулирует казалось бы прикладную задачу на «теоремном языке» (Франкль, 1973). Однако в его работах по пограничному слою использовались методы, которые сегодня считаются устаревшими: так называемый метод Польгаузена в теории ламинарного пограничного слоя и полуэмпирические методы в теории турбулентного пограничного слоя.

Газовая динамика. Начавшийся в 1930-х годах бум в газовой динамике не был данью моде. В повестке дня уже стояло создание высокоскоростных самолётов и высокоскоростных аэродинамических труб. Газовая динамика стала важнейшим направлением работ Франкля в ЦАГИ. Большую роль в пропаганде газодинамических знаний сыграла выпущенная им в соавторстве с С. А. Христиановичем и Р. Н. Алексеевой монография по этой теме.

Франкль исследовал вопросы существования и единственности решения нелинейных уравнений газовой динамики применительно к обтеканию крыла или осесимметричного тела. Он распространил теорему Жуковского о подъёмной силе крылового профиля на случай сжимаемого газа. В газовой динамике того времени успешно применялись такие методы математической физики, как метод характеристик, метод распределённых источников, теория потенциала, разложение в ряды. Используя эти методы, Франкль получил решение задачи о сверхзвуковом обтекании заострённого тела вращения и задачи об обтекании несжимаемой жидкостью тел (с протоком и без него), близких по форме к осесимметричным.

Совместно с М. В. Келдышем он доказал теорему существования и единственности решения задачи об обтекании крылового профиля потоком достаточно малой дозвуковой скорости.

Франклю удалось линеаризовать сложную задачу о движении лопастей винта при больших поступательных и окружных скоростях.

Трансзвуковые течения[1]. Основоположниками теории трансзвуковых течений считаются К. Гудерлей, фон Карман и Франкль (Коул, 1989; Шифрин, 2001). Работы Франкля в этой области посвящены прямым и обратным задачам трансзвукового обтекания профиля, прямым и обратным задачам течения в горловине сопла Лаваля, структуре потока в окрестности расположенного внутри области течения конца *висячего* скачка уплотнения.

Уравнение трансзвуковых течений (1.2) называют уравнением Кармана – Гудерлея, хотя ранее независимый вывод этого уравнения предложил Франкль.

На основе метода годографа им построены сопла Лаваля, реализующие бесскачковое течение, выведено условие непрерывности течения в центре сопла, поставлена задача о единственности решения прямой задачи сопла.

Франкль первым (1947) обратил внимание на возможность математической некорректности задачи о стационарном обтекании тела с безударной (бесскачковой) местной сверхзвуковой зоной на основе теоремы о единственности решения *обобщённой задачи Трикоми* для уравнений типа уравнения Чаплыгина. Эти предположения, так называемые «аргументы Франкля», легли в основу выполненного в 1953 году в США Кэтлин Моравец доказательства теоремы о корректности такого решения.

Франкль и Гудерлей независимо доказали существование и единственность решения задачи о дальнем поле в случае звукового течения (1947). На этом пути пришлось остроумно «пройти» нетривиальную особенность уравнения Трикоми в канонической эллиптической форме.

В послевоенных работах Франкля и его последователей с помощью метода Фурье исчерпывающее решение получила *задача Трикоми* об истечении струи из сопла с максимальным расходом. *Обобщённая задача Трикоми* впоследствии была решена численно.

Воспользовавшись методом годографа, Франкль свёл обратную задачу об обтекании некоторых, заранее неизвестных профилей при наличии местной сверхзвуковой зоны, замыкающейся прямым (1956) или непрямым (1957) скачком уплотнения, к *обобщённой задаче Трикоми*. Эти задачи называли «ударными задачами Франкля». В настоящее время получено их численное решение, то есть найдена форма обтекаемого профиля.

[1]Слово «трансзвуковой» придумали профессора фон Карман и Х. Л. Драйден. Английское написание «transonic» с одним s грамматически неправильно. Однако фон Карман считал, что в гидродинамике грамматические правила не действуют.

Математические модели природных процессов. Математическая модель явления строится на основе физической модели и интуиции. Франкль был непревзойдённым «модельером»; им построены следующие математические модели:

1) бокового водозабора из быстрых рек;
2) косого гидравлического прыжка;
3) сверхкритического течения на быстротоке;
4) течения жидкости со взвешенными наносами;
5) песчаных волн;
6) боры;
7) движения холодного слоя воздуха над пересечённой местностью;
8) планировки орошаемых полей.

Релятивистская газовая динамика. Будучи великолепным математиком, Франкль превосходно разбирался в тонких вопросах общей теории относительности. Ряд его работ посвящён задачи Коши. Его дискуссия с В. А. Фоком показала всю сложность этой проблемы, не имеющей решения в общем виде. Лишь в частном случае, при введении так называемых *гармонических координат*, задача была решена корректно.

В Бишкеке Франкль основал научную школу релятивистской газовой динамики. В рамках общей теории относительности он вывел уравнения движения и сохранения энергии в римановом пространстве. В рамках специальной теории относительности он показал, что, как и в классической газовой динамике, при отсутствии трения вихри не возникают и не исчезают. Обобщил теорему Кельвина на случай релятивистского течения.

Исследовал потенциальные релятивистские течения. Установил аналогию между течением ультрарелятивистского или фотонного газа и обычного идеального газа в случае, когда отношение теплоёмкостей равно 2. В решённой им задаче о расчёте тяги фотонного ракетного двигателя учитывалось поглощение и излучение света.

В.5.3. В. В. Струминский

Владимир Васильевич Струминский (1914–1938) — выдающийся аэродинамик, отец сверхзвуковой российской авиации — обладал могучим талантом, неиссякаемой творческой инициативой, драйвом, умением доводить начатое дело до конца.

Жизнь

Струминский родился в Оренбурге в семье педагога. Его отец Василий Яковлевич Струминский окончил Московскую духовную акаде-

В. В. Струминский (1914–1998)

мию, имел научные труды по психологии и философии, был профессором, членом-корреспондентом Академии педагогических наук Российской Федерации. До поступления на физический факультет Московского государственного университета В. В. работал слесарем, затем токарем. В МГУ учился в одной группе с будущим нобелиатом В. Л. Гинзбургом. Вот как вспоминает об этом сам Гинзбург (2001б): «... при том уровне и той системе (в отличие от системы Физтеха, где студент рано может проявить не только способность воспринимать, но и делать что-то самостоятельно) стать круглым отличником значило не так много. Это еще не было указанием на нечто обещающее. В нашей группе явно выделялись 5 человек (примерно из 20–25): В. В. Владимирский, М. Д. Галанин, С. З. Беленький, Л. М. Левин и я (явно способным был и В. В. Струминский, но он уже тогда находился несколько «в другой плоскости»)».

Как понимать эту «другую плоскость»? Хотелось бы думать, что это — более тесная связь с практикой. Не теоретизирование, а практическое моделирование.

Окончил так называемый *рабфак*, а затем — МГУ с отличием. В мае 1941 года после окончания аспирантуры и успешной защиты кандидатской диссертации Владимир Васильевич был направлен на работу в ЦАГИ (г. Жуковский).

Большинство инженеров в то время имело бескомпромиссный и себялюбивый характер. Но характер В. В.!!! На первых порах он способствовал продвижению по карьерной лестнице — уже в 1953 году он становится начальником второго отделения и заместителем начальника ЦАГИ. Впоследствии отношения с начальством испортились, и в 1962 году его переводят в начальники отдела. В это время он развивает активную деятельность в Академии наук СССР, а в 1966 году принимает предложение стать директором созданного в Сибирском отделении Академии наук СССР Института теоретической и прикладной

механики. После пятилетней работы в Сибири он был уволен и вернулся в Москву, где начал заниматься проблемами химической технологии.

На детях Владимира Васильевича природа не отдыхала. Его сын Борис Владимирович Струминский был выдающимся физиком-теоретиком, учеником Н. Н. Боголюбова. Вместе с учителем и тогдашним президентом грузинской АН А. Н. Тавхелидзе он ввел в рассмотрение новое квантовое число (цвет) и построил схему сильных взаимодействий, основанную на трех триплетах кварков с целочисленными зарядами. Трагически погиб в 2003 году.

Время

Вторая кадровая революция произошла после Второй мировой войны. В это время произошла бюрократизация научных и конструкторских предприятий ВПК. В условиях однопартийной системы и несменяемости кадров появился особый класс руководителей — партийная номенклатура.

Для содержания ГУЛАГа требовался значительный штат сотрудников. Почти треть населения СССР так или иначе была связана с НКВД — народным комиссариатом (министерством) внутренних дел. Одни являлись штатными или нештатными сотрудниками этого адского учреждения, другие пребывали в заключении. Как сейчас говорят: «Полстраны сидело, полстраны охраняло». Дети чекистов имели привилегии при зачислении в вузы. Они и составили значительную часть ВПК, а затем — и партийной номенклатуры.

Когда отсутствуют выборы и/или возрастные ограничения для сотрудников, структура предприятия деградирует, ее КПД устремляется к нулю.

Не было должной ротации кадров, дивергенции мнений и свободной циркуляции идей. Появились генералы, не выигравшие ни одного сражения, академики, не имеющие научных статей, профессора, не прочитавшие ни одной лекции.

Проблема появления номенклатуры в тоталитарном обществе не нова: её исследовали такие выдающиеся мыслители XX века, как английский экономист Ф. Хайек, американский социолог У. Липман, немецкий философ К. Ясперс и многие другие учёные.

Кроме демографических причин появления партийной номенклатуры (эмиграция ученых, репрессии, война), были еще и объективные причины: отсутствие возрастных ограничений на занимаемые должности, отсутствие критериальных оценок деятельности ученых и инженеров.

На административные должности выдвигались не яркие самостоятельные личности, а покладистые посредственности.

Так возникло расслоение сотрудников ВПК на партийную номенклатуру и научно-техническую интеллигенцию. *Партноменклатурщики* оккупировали Академию наук, ученые и научно-технические Советы ВПК, кафедры вузов. Снизился уровень научных исследований, прикладная наука выродилась в ремесло. Номенклатура стала готовить себе подобных в полном соответствии с синергетическими законами размножения и конкуренции в открытой системе. Воспитанные ими молодые специалисты оказались окончательно оторванными от науки. Завоевание командных постов партийной номенклатурой в 1940–1960-х годах и явилось результатом второй кадровой революции в СССР.

В авиации этот естественный процесс выразился в том, что задолго до краха всей коммунистической системы он стал одной из причин кризиса авиастроения. Мы уже не могли конкурировать с Западом.

Выдающегося руководителя ЦАГИ Н. М. Харламова расстреляли в 1937 году.

Не менее выдающегося начальника ЦАГИ С. Н. Шишкина и его падчерицу связывала любовь, что было недопустимо по суровым моральным канонам того времени (впоследствии они поженились). Шишкина уволили из ЦАГИ в 1950 году «за аморальное поведение». Встал вопрос: кого назначить вместо него? Конечно, секретаря парткома ЦАГИ. Но его уволили вместе с Шишкиным за развал дела воспитания морально устойчивых строителей коммунизма. Пришлось поставить начальником А. И. Макаревского, тогда малозаметного инженера.

Номенклатура начинает увольнять крупных ученых. Макаревский, как уже отмечалось, уволил Христиановича. В 1962 году другой начальник ЦАГИ, генеральный конструктор В. М. Мясищев увольняет с должности начальника отделения другого академика — Струминского. Впоследствии следующий начальник ЦАГИ академик Г. П. Свищев откажет Струминскому в приеме на работу.

Творчество

В. В. до краев был наполнен идеями. С карандашом в руках и тетрадкой он не расставался даже во время отдыха — возникающие мысли сразу же фиксировал. В ежегодные поездки на юг он брал с собой научные книги. Читать, осмысливать, внедрять — вот его жизненное кредо.

Будучи 20-летним юношей, Струминский участвовал в усовершенствовании отбойного молотка и получил за это свое первое авторское свидетельство (!).

В кандидатской диссертации он рассмотрел образование простейшей кристаллической структуры у *мертвой материи* (β-латуни), на арифмометре проинтегрировав уравнение Шрёдингера.

Творческую интеллигенцию ВПК, как уже говорилось, можно разделить на три типа: теоретики, инженеры и прикладные ученые. Прикладные ученые сочетали инженерную и научную деятельность, шли к науке от практических потребностей авиации: Н. Е. Жуковский, Д. П. Рябушинский, С. А. Христианович и др. Струминский относится к этой группе ученых, в ЦАГИ он был последним из могикан — последним прикладным ученым. После него между наукой и инженерией образовался разрыв, тоже явившийся одной из причин кризиса советского авиастроения.

В историю ЦАГИ и российской авиации Владимир Васильевич входит как инженер-исследователь № 1. Под его непосредственным руководством были созданы комплексы уникальных экспериментальных установок: малотурбулентные дозвуковые и сверхзвуковые аэродинамические трубы (в ЦАГИ и в Сибирском отделении Академии наук СССР), сверхзвуковые и гиперзвуковые аэродинамические трубы периодического действия, гиперзвуковые импульсные установки для больших чисел Рейнольдса, вакуумные трубы, криогенные стенды[1].

Струминский по праву считается отцом российской сверхзвуковой авиации: главное его достижение — это создание первых в стране самолетов со стреловидными крыльями и преодоление ими *звукового барьера*. Для этого потребовались кропотливые и многолетние испытания моделей самолетов в аэродинамических трубах. Неистовая энергия Струминского помогла ему преодолеть противодействие внедрению стреловидности со стороны руководства института. В. В. был ярым сторонником внедрения стреловидных крыльев[2]. Интересно, что во время войны он ездил на фронт для опроса летчиков о поведении самолетов в боевых условиях.

Законы обтекания на дозвуковых и сверхзвуковых скоростях различны. Поэтому кроме внедрения стреловидных крыльев, потребовалось внедрение иной механизации крыла, иной системы управления, иной аэродинамической компоновки самолета. Так началась революция

[1]Руководить научными аэродинамическими установками должны ученые, как это происходит в NASA или в Институте теоретической и прикладной механики СО РАН. К сожалению, в ЦАГИ не пошли по этому пути. Поэтому *малотурбулентные аэродинамические трубы* Т-124 и Т-125, построенные Струминским, оказались невостребованными.

[2]Ромбовидные крылья имеют крылатые ракеты, а треугольные крылья — опытные и серийные сверхзвуковые самолеты (Су-9, Су-11, Су-15, Т-4, МиГ-21, М-50 и др.).

в самолетостроении, которую впоследствии журналисты назовут героическим штурмом «звукового барьера».

Уже в 1947 году в конструкторских бюро С. А. Лавочкина, А. С. Яковлева и А. И. Микояна были построены первые опытные истребители со стреловидными крыльями. Применение оптимальных крыльев в пассажирской и военной авиации существенно повысило аэродинамическое совершенство российских самолётов. Звуковой барьер в России преодолел в 1948 году самолет ЛА-176 авиаконструктора Лавочкина. На основе исследований Струминского были созданы, в частности, самолеты МиГ-15, превосходно зарекомендовавшие себя в корейской войне 1950-х годов.

В то время начались и не затихают до сих пор споры о предназначении ЦАГИ. Что он должен представлять собой: арсенал аэродинамических труб или «силиконовую долину»? Струминский отстаивал первую точку зрения, Христианович — вторую. Тогда[1] невозможно было выбрать одну из этих двух возможностей на основе точного экономического расчета. Копья ломали зря...

Сегодня наша авиация вместе со страной переживает глубокий кризис. Что требуется для выхода из кризиса? Идеи, деньги и таланты! Идеи есть: наука готова создавать самолеты следующего поколения. Деньги тоже есть. Нужны лишь люди, которые могут их достать. И непременно нужны жуковские, сикорские и струминские, которые могут создавать летательные аппараты.

Как ученый Струминский имеет достаточно высокий индекс публикаций. Его теоретические исследования отличались обзорностью, дидактичностью, рекордно широким охватом научных разделов и всегда были актуальны. Он не ждал, когда время догонит его. Именно такая крупномасштабная направленность исследований должна быть свойственна выдающимся прикладным ученым. Поражает широта интересов Владимира Васильевича, он оставил печать своего таланта чуть ли не во всех областях гидродинамики. Аэромеханика и энергетика, физика и химия, экология и квантовая механика, авиация и космонавтика, технология

[1]Сегодня проблемы другие. Перед Россией стоит первоочередная задача создания конкурентоспособных летательных аппаратов, выхода на мировой авиационный рынок, где господствуют американская фирма *Боинг* и европейский консорциум *Эрбас Индастри*. Авиация должна стать локомотивом, способным вытащить российскую экономику из затянувшегося застоя. В связи с этим перед ЦАГИ стоят субзадачи разработки современной методики аэродинамического эксперимента и создания конкурентоспособного (*безэмпирического*) пакета прикладных программ по аэродинамическому расчету летательных аппаратов.

и машиностроение, экономика и философия — вот неполный перечень направлений, над которыми он интенсивно работал.

Теоретические разработки Струминского по гидродинамике можно уверенно разделить на 4 группы: аэродинамика крыла, теория пограничного слоя, теория гиперзвуковых течений и кинетическая теория газов.

Аэродинамика крыла. Струминский открыл и исследовал так называемый *эффект скольжения*. Он заключается в том, что а) продольное течение не зависит от поперечного течения (принцип автономности), б) течение двумерное, то есть не зависит от третьей (поперечной) координаты.

Эффект скольжения в идеальном газе является прямым следствием принципа относительности Галилея: физические законы независимы от выбора инерциальной системы координат. Справедлив ли он в вязкой жидкости? Казалось бы, нарастание пограничного слоя по размаху крыла позволяет усомниться в его справедливости. Именно такие аргументы выдвигали консерваторы (А. А. Дородницын и др.), не признававшие эффект скольжения. Л. Прандтль (1945) и В. В. Струминский (1946) показали, что он справедлив в случае ламинарного течения.

В результате многочисленных экспериментальных исследований на стреловидных крыльях были обнаружены области, где эффект скольжения нарушается.

Теория пограничного слоя. В школе Жуковского – Чаплыгина изучали течение идеальной жидкости и не учитывали действие вязкости. Ф. И. Франкль и В. В. Струминский были первыми в ЦАГИ, кто обратился к теории пограничного слоя и проблеме его устойчивости.

Владимир Васильевич получил точное решение уравнений трехмерного пограничного слоя, когда внешнее течение исходит от вихреисточника. Им же предложен метод решения уравнений трехмерного пограничного слоя с помощью координатных рядов, а также показано, что трехмерный пограничный слой вырождается в двумерный только в случаях плоского или радиального внешних течений.

Струминский исследовал нестационарный пограничный слой. Хотя эмпирические методы в наше *компьютерное время* считаются устаревшими, Владимир Васильевич с их помощью получил ряд новых качественных результатов. Например, оказалось, что положительное ускорение самолета уменьшает неблагоприятное влияние градиентов давления, ликвидирует отрыв потока, а отрицательное ускорение усиливает отрыв.

Струминский предложил использовать метод деформированных координат в теории устойчивости пограничного слоя, им рассмотрены вопросы стабилизации течения с ростом времени.

Теория гиперзвуковых течений. Предложен эмпирический метод решения задачи об обтекании тепла гиперзвуковым потоком, заключающийся в использовании интегральных соотношений и аппроксимирующих функций. Сегодня этот метод тоже считается архаичным.

Кинетическая теория газов. Для решения уравнения Больцмана Струминский, как и в теории устойчивости пограничного слоя, использует метод деформированных координат, учитывая одновременно быстрый и медленный процессы. Как и при применении метода Гильберта, в первом приближении получаются уравнения Эйлера, во втором — уравнения Навье – Стокса, в третьем — уравнения Барнетта.

Как задавать начальные данные для решения уравнения Больцмана? В виде начальной функции распределения или в виде первых пяти гидродинамических моментов? Струминский показывает, что полная информация о начальном состоянии газа, определяемая бесконечным набором моментов (начальной функцией распределения), теряется в течение времени, равном по порядку величины времени свободного пробега, а затем система сохраняет в памяти лишь первые пять моментов.

В случае газовой смеси, когда процесс перемешивания смеси еще не завершен и вероятность соударений молекул разного сорта мала, в первом приближении получается обобщенная на случай многокомпонентной среды система уравнений Эйлера. В следующем приближении получается система уравнений Навье – Стокса с коэффициентами вязкости и теплопроводности, отличными от тех, которые получаются с помощью классического метода Чепмена – Энского. Лишь вблизи равновесного состояния это отличие исчезает.

В качестве примеров Струминский рассмотрел течение бинарной смеси между двумя параллельными плоскостями и течение в круглой трубе.

Владимир Васильевич применяет методы кинетической теории газов к исследованию турбулентных течений. По современным воззрениям, турбулентное течение представляет собой стохастический конгломерат рождения, эволюции и смерти когерентных и некогерентных вихрей разных масштабов и форм. Гидродинамический хаос взаимодействует с молекулярным хаосом. Поэтому в уравнении Навье – Стокса должны появиться «напряжения Больцмана», ответственные за эхо-влияние этого взаимодействия. Однако их величина неизвестна. Обычно считается, что эти напряжения малы.

Струминский предполагает, что в турбулентном течении можно, выделив отдельные группы молекул, исследовать их движение и перемешивание. Такую *двухгрупповую* модель течения он применяет для изучения течения в плоском канале и для описания структуры ударной волны.

Такая теория не учитывает перехода молекул из одной группы в другую и не является замкнутой. По-видимому, по этим причинам она не получила дальнейшего развития.

В разное время Струминский читал лекции по теории крыла, по кинетической теории газов, по теории устойчивости, по проблемам турбулентности. Лекции он читал не по учебникам, они были *очень авторскими*. Нужно отметить, что теории крыла в том виде, как мы ее сейчас понимаем, не существовало, ибо еще не появились работы основателей метода сращивания асимптотик, широко используемого в аэродинамике: М. Ван-Дайка, С. Каплуна, П. Лагерстрема, Цянь Сюэ-сеня и многих других. В. В. хотел построить здание теории, для которой еще не был возведен фундамент. И здесь он опережал время[1].

Как научный руководитель, Струминский не занимался плотной опекой вверенных ему студентов и аспирантов, руководствуясь принципом Остапа Бендера: «Спасение утопающих — дело рук самих утопающих». *Спаслись* те из его учеников, которые занимались теорией пограничного слоя: Ю. И. Пономарёв, А. В. Зубцов, В. М. Филиппов. Работы Струминского по аэродинамическому проектированию самолетов продолжили Я. М. Серебрийский, а затем — В. М. Фомин.

В последние годы жизни Владимир Васильевич занимался перспективной проблемой применения в качестве топлива жидкого водорода.

Владимир Васильевич не был ученым-затворником. Он активно интересовался искусством, политикой, философией, спортом. Писал популярные статьи о науке, об авиации, о применении водородного топлива на транспорте. Рано или поздно человек начинает задумываться над вопросами мироздания. Работы Струминского по вопросам философии профессионалу могут показаться наивными, но они лишний раз свидетельствуют о необычайно широком круге его интересов.

Струминский состоял членом многих научно-технических журналов, был руководителем семинаров и конференций.

[1]Шуршат желтые страницы — я листаю лекции В. В. по теории крыла. Мы, студенты МФТИ, приезжали из г. Долгопрудного в г. Жуковский на его лекции к 9 часам утра. Вставали непривычно рано, поэтому спали прямо на занятиях. Вздремнешь и вдруг услышишь: «Бетяев, повторите, что я сказал!»... Научились спать чутко, как кошки.

В.5.4. А. А. Никольский

Александр Александрович Никольский — выдающийся российский аэродинамик, полный тезка эмигрировавшего в США основоположника вертолётного образования в США.

А. А. Никольский (1919–1976)

Жизнь

Никольский родился 13 февраля 1919 года на станции Нижний Баскунчак Астраханской области в семье православного священника. Его фамилия традиционна для священнического сословия. После прихода к власти воинствующих атеистов в 1917 году отец стал преподавать в школе математику и физику. Наряду с духовным званием впоследствии он получил звание «Заслуженный учитель РСФСР». Мать в той же школе преподавала русский язык и литературу. В такой семье Александр получил прекрасное воспитание и гуманитарное образование. Его любимым поэтом был Н. Гумилёв, запрещённый и поэтому мало известный в советское время. А любимым творением Гумилёва для Никольского было, посвящённое Валерию Брюсову, стихотворение «Волшебная скрипка».

Тот, кто взял её однажды в повелительные руки,
У того исчез навеки безмятежный свет очей.
Духи ада любят слушать эти царственные звуки,
Бродят бешеные волки по дороге скрипачей.

В 1936 году Александр поступил на механико-математический факультет МГУ. Сначала к учёбе относился с прохладцей, увлекался шахматами, Москвой и литературой. Затем всерьёз увлёкся наукой, стал сталинским стипендиатом и окончил университет с отличием сразу по двум специальностям: математике и механике. В 1941 году попал по распределению в самолётное (второе) отделение ЦАГИ, где получил бронь —

отставку от военной службы. Во время войны институт был эвакуирован в Казань и Новосибирск. Никольский попал в Новосибирск. Именно там в 1942 году умер С. А. Чаплыгин, как бы передав эстафету в руки нового поколения учёных.

В 1943 году Никольский вместе с ЦАГИ возвращается в посёлок Стаханово (с 1947 года — город Жуковский). В 1946 году, после окончания аспирантуры ЦАГИ и защиты диссертации получает учёную степень кандидата физико-математических наук. В военные и послевоенные времена научная карьера делалась быстро. Кроме того, Никольский выделялся среди коллег по своим способностям и уровню образования. Его начальниками и руководителями были А. К. Мартынов и С. А. Христианович.

Читая труды Никольского (1981), убеждаешься, что его можно считать продолжателем дела Чаплыгина и Франкля, а из иностранных учёных — Буземана. За глаза А. А. так и звали — Пуземан с намеком на издали заметный живот.

В 1949 году Никольский становится доктором физико-математических наук, начальником отдела во втором отделении. В этом же году он начинает работать по совместительству в Институте механики Академии наук СССР. Научная деятельность таких выдающихся теоретиков, как Франкль и Никольский, напрямую не была связана с аэродинамическим проектированием, составляющим тематическую основу деятельности ЦАГИ. Поэтому они и стремились покинуть ВПК (ЦАГИ).

Если одним словом охарактеризовать стиль научного руководства Никольского, то оно сразу же приходит на ум — свобода. Свобода во всём, будь то присутствие на работе или выбор темы исследований. Свобода — это значит самостоятельность в принятии решений, что отличает настоящего учёного от ненастоящего. Из его учеников наиболее перспективным считался М. Д. Ладыженский, но он рано умер из-за ошибки врачей в установлении диагноза прободного аппендицита. Их обоих, учителя и ученика, отличала удивительная способность видеть и «чувствовать» свойства газодинамических уравнений — самых «длинных» и сложных уравнений теоретической физики.

Есть одна общая черта у Никольского и у . . . И. Ньютона. Известно, что Ньютон не любил читать лекции. Студенты не посещали его занятия. Если появлялось 2–3 человека, то Ньютон с большой неохотой начинал читать лекцию, многократно запинаясь и ошибаясь. Таким же неумением читать лекции обладал Никольский. Создавалось впечатление, что он не тратил на их подготовку ни одной минуты.

Разумеется, Александру Александровичу сполна достались поощрения тех времён: благодарности, премии, медали, ордена и даже... взыскания. Вот любопытная выписка из личной анкеты Никольского.

1. *Выговор за неявку на дежурство* (1943 *г.*).

2. *Строгий выговор с предупреждением за оставление спецматериалов в закрытом столе* (1947 *г.*).

3. *Сталинская премия за* 1950 *г.*

Здесь всё вместе: и выговора, и премии. Так начиналась бурная жизнь молодого учёного.

В то время учёных уважали: на премиальные Никольский купил легковую автомашину «Победа», его семье выделили коттедж в центре города.

В военное и послевоенное время режим секретности был ужесточенным. Первую свою работу в открытой печати Никольский опубликовал в 1944 году. Вышедший в 1957 году в издательстве ЦАГИ «Сборник теоретических работ по аэродинамике» (ред. Б. А. Ушаков) содержал 26 статей, из которых 7(!) принадлежали Никольскому. Эта монография, которую в шутку стали называть «Сборником работ Никольского», сыграла свою роль в развитии газовой динамики.

В 1960 году Никольский становится директором Института механики Академии наук СССР. В первое время он основывает новое издание — «Инженерный журнал», входит в составы редакционных коллегий других научных журналов, ведёт интенсивную научную работу: 1961 год — 9 печатных работ, 1962 год — 5, 1963 год — 5. Однако директорская должность не стала для сорокапятилетнего учёного синекурой. Будучи по природе и по воспитанию высоконравственным человеком, не способным к угодничеству, лести и интригоплетению, Никольский не подходил на должность руководителя.

Сначала Никольскому отказали в присуждении звания члена-корреспондента АН СССР, а затем вынудили уйти с директорского поста «по собственному желанию». Такова драма учёного. С 1965 по 1967 год Никольский заведует лабораторией Вычислительного центра АН СССР, а затем снова приходит в ЦАГИ и скоро занимает должность заместителя начальника того же второго отделения. В то время учёные этого определяющего лицо ЦАГИ отделения перешли в другие отделения — институт в результате недальновидных политико-административных решений стал резко переориентироваться на ракетную тематику, проблемы авиации отошли на второй план. Перед Никольским встала задача поднять уровень теоретических исследований в отделении, и он взялся за разработку самого актуального для аэродинамики самолёта направления —

за теорию отрывных течений. Дело в том, что теории, не учитывающие отрыв потока от крыла самолёта, находились в резком противоречии с результатами трубных и лётных экспериментов. Возникла необходимость понять механизм отрыва — одного из самых сложных гидродинамических явлений. Из всех своих работ самыми главными Александр Александрович считал статьи по теории отрывных течений.

Второй период деятельности Никольского в ЦАГИ не был столь плодотворным, как первый. Сказался возраст и неудачи в карьере, пришло осмысление происходящего...

Никольский страдал мерцательной аритмией сердца — той его формой, когда течение крови в сосудах становится непредсказуемым, турбулентным. Умер от разрыва сердца 12 июня 1976 года.

Время

В школе ЦАГИ завершалась разработка первой парадигмы применительно к газовой динамике.

В 1950–1970-х годах в отделении механики АН СССР главенствовал Л. И. Седов. Без его рекомендации практически нельзя было стать членом-корреспондентом АН СССР. Без ссылки на его книгу по теории размерности (Седов, 1977) трудно было опубликоваться в академических журналах по механике. Никольскому на это сразу же намекнули. Сама по себе эта книга была написана на высоком научном уровне, но в ней вся роль в становлении теории размерности и теории автомодельных решений отводилась автору, не было ссылок ни на Р. Бакингема, одного из основоположников теории подобия, ни на Г. Гудерлея (см. Зельдович, Райзер, 1966), основоположника теории одномерных автомодельных течений[1].

К 1980-м годам выяснилось, что ЦАГИ не входит в тридцатку российских научных центров, имеющих наивысший индекс цитирования. В то далёкое время деньги не считали, о рентабельности не задумывались. Дело дошло до того, что начальник ЦАГИ Г. П. Свищев и его замы приступили к осуществлению проекта, сравнимого по масштабу со знаменитым проектом поворота сибирских рек, — строительству «третьего ЦАГИ» под городом Ульяновском[2].

[1]Как уже отмечалось, лорд Бакингем доказал так называемую π-теорему. Гудерлей впервые решил автомодельную задачу. Это была одномерная задача о сходящейся к центру цилиндрической или сферической ударной волны — так называемая автомодельная задача второго рода.

[2]В то время осуществлялись такие печально знаменитые проекты, как освоение цели-

Непрофессионализм номенклатуры... На развитие вычислительной гидродинамики в ЦАГИ отрицательное влияние оказал А. А. Дородницын, работавший сначала (с 1958 года) начальником одного из отделений ЦАГИ, а затем директором Вычислительного центра Академии наук СССР и по совместительству научным руководителем того же отделения ЦАГИ. Он пропагандировал свои, лишенные математической строгости численные методы. Предложил даже заменить аэродинамический эксперимент так называемым вычислительным, но, слава Богу, его не послушали.

Его идея об организации вычислительных центров в Академии наук и в ЦАГИ не выдержала испытание временем — развитие вычислительной техники пошло по пути *персонализации*[1]. Никольский всегда был противником таких — возьмите следующее слово в кавычки! — идей.

Талантливый учёный и обаятельный мужчина, Никольский достойно представлял российскую науку за рубежом, будучи членом президиума Союза теоретической и прикладной механики (IUTAM) и поэтому «выездным» в условиях «железного занавеса». Он был лично знаком с крупнейшими гидродинамиками того времени Теодором фон Карманом, Клаусом Осватичем, известным издателем Максвеллом. Семьи Никольского и Антонио Ферри дружили между собой. Известный американский гидромеханик Милтон Ван-Дайк именно Александру Александровичу доверил редактирование перевода на русский язык своей неувядаемой книги по асимптотическим методам (Ван-Дайк, 1967). Предисловие к ней заканчивалось словами: «Я не смог отразить в должной мере существенный вклад советских исследований в развитие предмета. К счастью, мой давний друг, профессор А. А. Никольский, напишет предисловие к переводу, и я надеюсь, что он сообщит также дополнительные сведения о работах советских учёных».

ны в Казахстане, строительство целлюлозно-бумажного комбината на Байкале, создание Байкало-Амурской железнодорожной магистрали...

Мощность больших аэродинамических труб приближается к полумиллиону киловатт, то есть к мощности современных ТЭЦ. Продвижение по числам Re за счет увеличения размеров трубы лимитировано примерно такими пределами. Поэтому разумнее внедрять новые методики аэродинамического эксперимента, чем строить гигантские аэродинамические трубы.

[1]В конце концов Дородницын — действительный член Академии наук СССР! — скатился до проповеди примитивного антисемитизма. Если антисемитизм Л. С. Понтрягина выглядел инфантильным чудачеством крупного ученого, то антисемитизм Дородницына был чистым абсурдизмом, свидетельством ограниченности культуры.

Окончательное падение Дородницына как личности свершилось, когда он поставил свою подпись под письмом, осуждающим правозащитную деятельность А. Д. Сахарова.

Творчество

Выдающийся русский механик Никольский всегда стоял на позициях строгой математики, строил математические модели на основе первых принципов механики, предпочитая аксиоматический подход эмпирическому. Он не был ни клавишником — вычислителем, ибо в то время ещё не было вычислительных машин, ни эпсилонистом. Он владел асимптотологией на интуитивном уровне. Он не был хаотистом — тем, кто занимается проблемой хаоса, то есть турбулентностью. До этих задач ещё не дошло время. Он был просто классиком. Ему выпала своя доля — завершить разработку такого раздела гидродинамики, как газовая динамика. Кроме того, он был модельером-разработчиком математических моделей сложных динамических явлений. Его отличало понимание Времени и любовь к нему.

Рассмотрим некоторые фрагменты его творчества.

Теорема Никольского – Таганова. Эта теорема (её ещё называют *законом монотонности*), установленная в 1946 году, сегодня входит во все учебники по теории трансзвуковых течений:

если двигаться вдоль линии перехода так, чтобы область дозвуковых скоростей лежала слева, то вектор скорости будет монотонно поворачиваться по часовой стрелке.

Опираясь на эту теорему, авторы установили то предельное значение числа Маха в набегающем потоке, после которого потенциальное течение с местной сверхзвуковой зоной становится невозможным.

Существует ли непрерывное трансзвуковое течение на крыловом профиле? Этот вопрос был решён в 1956–1958 годах уже упомянутой американкой К. С. Моравец.

Сверхзвуковое коническое течение. Сверхзвуковые конические течения открыл выдающийся немецкий учёный, ученик Прандтля А. Буземан (1950). Он исследовал два типа конических течений: обтекание конуса (рис. В.1 *а*) и течение в сужающемся сопле (рис. В.1 *б*). В обоих случаях нашел точные решения, сделав следующее заключение: «Существует лишь два типа конических осесимметричных течений: течение в сопле сжатия и течение вокруг осесимметрично обдуваемых конических вершин». Вопреки этому утверждению Буземана, Никольский в 1946 году открыл третий тип сверхзвукового осесимметричного конического течения — внешнее обтекание сужающейся части тела вращения между лучами OA и OB (рис. В.1 *в*). И тоже получил точное решение задачи.

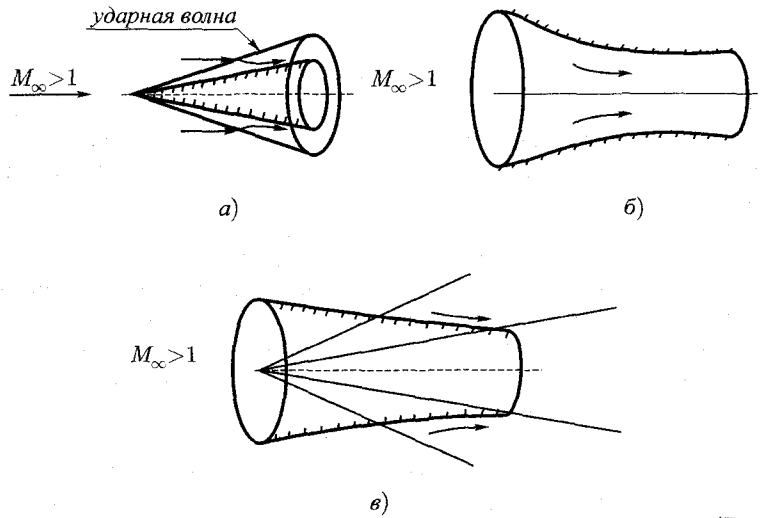


Рис. В.1. Сверхзвуковые конические течения: *а* — обтекание конуса (Буземан, 1929); *б* — течение в сужающемся сопле (Буземан, 1942); *в* — обтекание хвостовой части осесимметричного тела (Никольский, 1946)

В настоящее время исследование конических течений продолжается; исследования распространились на дозвуковой диапазон скоростей с учётом завихренности, закрутки и даже вязкости (см. Фернандес-де ля Моро Ж., 1999).

Оптимальное тело с протоком. В рамках линейной теории Никольским в 1950 году найдена форма тела с протоком, обладающего минимальным внешним волновым сопротивлением в сверхзвуковом потоке. В этой работе впервые был применён оригинальный метод уменьшения числа независимых переменных за счёт перехода к характеристическому контрольному контуру. Эта работа послужила началом и идейным источником для исследований крыльев и тел вращения минимального сопротивления, проведенных его учениками и последователями: В. Н. Жигулёвым, Ю. Л. Жилиным, М. Н. Коганом, А. Н. Крайко, Ю. Д. Шмыглевским (см. Миеле, 1969).

Идея Никольского о переходе к контрольному контуру оказалась чрезвычайно плодотворной. На ее базе был разработан метод контрольной поверхности, учитывающий нелинейность и трехмерность[1].

[1]В отличие от классического метода множителей Лагранжа метод контрольной поверхности не является универсальным методом решения вариационных задач гидродинамики.

В настоящее время теория оптимальных аэродинамических форм зашла в тупик. Дело в том, что ещё не получено безэмпирическое решение задачи (уравнения Навье–Стокса) об обтекании тела заданной формы. Если быть последовательным, то следует признать, что теорию оптимальных форм следует разрабатывать только после того, как эта задача будет решена с помощью быстро развивающихся методов DNS или LES. В этом смысле работа Никольского об оптимальном теле с протоком опередила время.

Теорема Никольского о хвостовом скачке. При обтекании остроконечной задней кромки тела вращения образуется хвостовой скачок. Никольский в 1950 году строго показал, что скачок образуется, если телесный угол задней кромки не равен нулю (Никольский, 1981, с. 71–73). Справедлива теорема Никольского (Шифрин, 2001, с. 235):

при осевой симметрии непрерывное сверхзвуковое течение на задней кромке не существует, если контур не касается оси симметрии.

Условия Никольского на проницаемых границах. С целью уменьшения влияния стенок аэродинамической трубы на обтекание модели, особенно существенного при околозвуковых скоростях, применяется перфорация. Для расчёта течения газа вблизи проницаемой стенки требуется задание на ней граничного условия. Никольским в 1951 году выведено такое условие в случае, когда стенка имеет продольные щели: $u' = 0$, где u' — возмущение продольной компоненты скорости. Условие Никольского означает, что возмущение давления на стенке постоянно. Тем самым показано, что в линейной теории воздействие на поток продольных щелей тождественно воздействию свободной границы. Работа Никольского об условиях на проницаемых границах составила четвертую главу книги о сверхзвуковых течениях в проницаемых границах (Гродзовский и др., 1967).

Общий вид линейного граничного условия на проницаемых поверхностях ($u' = kv'$, где v' — возмущение поперечной компоненты скорости) известен априори, до решения задачи. Решение линейной задачи о течении газа вблизи проницаемой поверхности необходимо лишь для определения зависимости параметра k от числа M_∞ и от коэффициента проницаемости стенок. Промыслительно, что полная линейная задача об обтекании профиля крыла в проницаемых границах решена Натальей Маревцевой, дочерью профессора Никольского [86].

Есть причины (например, излом контура обтекаемого тела или сопла), которые ограничивают область его применения (см. Крайко, 1979).

Согласно современным воззрениям полная задача об обтекании тела, помещённого внутрь контура с мелкомасштабной проницаемостью, разделяется на внешнюю задачу и внутреннюю (см. Бетяев, 1993). Внешняя задача — это задача об обтекании тела с граничными условиями на проницаемых и непроницаемых участках стенки. Внутренняя задача — это задача о перетекании газа через проницаемую стенку; обтекаемое тело здесь отсутствует — оно как бы отодвинуто на бесконечность. Из решения внутренней задачи определяются граничные условия для внешней задачи, представляющие собой внешний предел внутреннего разложения. К сожалению, решение внутренней задачи до сих пор не получено.

Уравнение Никольского или уравнение Биркгофа – Ротта? Зададим форму вихревой пелены в плоскости xy в параметрическом виде:

$$z(\Gamma, t) = x(\Gamma, t) + iy(\Gamma, t),$$

выбрав в качестве параметра циркуляцию Γ куска вихревой пелены, отмеренного от некоторой фиксированной точки, где $\Gamma = 0$. Тогда уравнение эволюции плоской вихревой пелены[1] с течением времени t будет иметь такой вид:

$$\frac{\partial \bar{z}(\Gamma, t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\Gamma} \frac{d\Gamma'}{z(\Gamma, t) - z(\Gamma', t)} + u_0(z, t), \qquad \text{(B.1)}$$

где u_0 — скорость, индуцируемая посторонними факторами, черта сверху означает комплексно-сопряжённую величину, интеграл понимается в смысле Коши.

Это интегродифференциальное уравнение называют уравнением Биркгофа – Ротта (Сэффмен, 1992). Его вывод при достаточно общих предположениях дал Г. Биркгоф в 1962 году, но использовалось оно Н. Роттом ещё в 1956 году. Никольский независимо использовал его в 1957 году. Опоздал на один год, но ещё ранее это уравнение применял Л. Антон (1939).

[1] С. Хокинг (2000) считает, что каждая формула в популярной статье вдвое сокращает число читателей. Этот вывод не относится к читателям с математическим складом мышления — они легче понимают символы, чем слова.

Как говорил С. С. Аверинцев, «мы живём в эпоху, когда все слова уже сказаны». Однако формулы выписаны ещё не все. А вот мнение Б. Пастернака:

Хоть истина нужнее людям,
Все ж сложное понятней им.

В настоящее время уравнение эволюции контактного разрыва выведено с учётом силы тяжести, разных свойств соприкасающихся жидкостей, поверхностного натяжения и обобщено на случай пространственного движения [90]. Принципиальным является доказанная некорректность задачи Коши для уравнения (В.1) и частное проявление некорректности — *парадокс Мура, связанный с появлением сингулярности за* конечное время (Фриш, 1998).

Течение Никольского. Если представить циркуляцию в виде δ-функции, то есть сосредоточить завихренность в точке, то интеграл в (В.1) исчезает, уравнение становится алгебраическим. В этом случае вихревые пелены заменяются точечными вихрями. Заслуга Никольского состоит не в том, что он предложил рассматривать течение с точечными вихрями — это много раз делали до него!, — а в том, что он в 1957 году показал его пригодность для точного моделирования отрывного автомодельного течения при значении показателя автомодельности $n = 1/2$. Плоское течение Никольского описывает отрывное обтекание тела, начавшего при $t = 0$ поступательное движение и аффинное расширение со скоростями, пропорциональными $t^{-1/2}$ (рис. В.2).

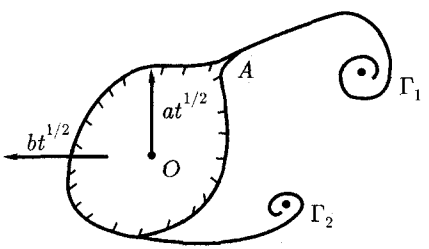


Рис. В.2. Плоское течение Никольского ($at^{1/2}$ — закон подобного расширения, $bt^{1/2}$ — закон поступательного перемещения, Γ_1 — циркуляция точечного вихря, «оторвавшегося» с острой кромки A, Γ_2 — циркуляция точечного вихря, «оторвавшегося» от гладкой поверхности)

Пространственное стационарное течение Никольского описывает обтекание *заострённых тел степенной формы* (см. Бетяев, Гайфуллин, 2001). На рис. В.3 представлено крыло степенной формы в плане и изогнутое по тому же степенному закону — так называемая «лыжа Никольского».

В настоящее время численные методы позволяют рассчитывать эволюцию отходящей от тела автомодельной вихревой пелены при любых

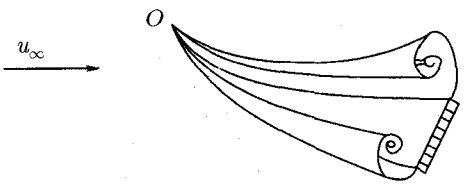


Рис. В.3. Пространственное стационарное течение Никольского

значениях показателя автомодельности n. Найденное Никольским вырожденное решение остаётся единственным решением этой задачи, полученным в замкнутой форме.

Парадокс Никольского. Никольским показано (1961), что при движении тела в ограниченном объёме вращающейся жидкости сила сопротивления пропорциональна не ускорению, как в незакрученной жидкости, и не скорости, как в безграничной жидкости, а пути (!), пройденному телом.

Нестационарное медленное движение тела во вращающейся жидкости связано с образованием столбов Тейлора – Праудмена (см. Бэтчелор, 1973), что и приводит к парадоксальному поведению силы сопротивления. Детали такого феномена до сих пор неизвестны.

Точные решения уравнения Больцмана. Уравнение Больцмана для функции распределения $f(x, y, z; u, v, w; t)$, где (x, y, z) — координаты, (u, v, w) — скорости, имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = I, \tag{В.2}$$

где I — интеграл столкновений.

Известные в то время точные решения этого уравнения соответствовали либо случаю постоянной макроскопической скорости газа $\boldsymbol{u} = \mathrm{const}$, либо случаю его вращения как твёрдого тела. А. А. Никольский в 1963 году обнаружил непрерывную пространственно-однородную группу преобразований:

$$f = f_0\left(0, 0, 0; u - \frac{x}{t}, v - \frac{y}{t}, w - \frac{z}{t}; t\right), \tag{В.3}$$

редуцирующую уравнение (В.2) к упрощённому виду:

$$\frac{\partial f_0}{\partial \tau} = I, \tag{В.4}$$

где новая переменная τ является функцией только времени.

Проанализированы случаи, когда при $t \to \infty$ распределение скоростей стремится к максвелловскому.

Преобразование Никольского (В.3) справедливо в случае $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}/t$, где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор. Течение называется слётом (коллапсом), если время выбрано в интервале $-\infty < t \leqslant 0$, и разлётом (взрывом), если время выбрано в интервале $0 \leqslant t < \infty$. Преобразование Никольского (см. Труселл, Манкастер, 1980) придало новый смысл (точным) решениям уравнения (В.4). Однако практическое применение его ограничено, так как плотность и температура специальным образом зависят от времени.

Точные решения могут быть получены интуитивно, с помощью озарения (несколько устарелый набор таких решений содержится в книге Флюгге, 1963) или с помощью мощного теоретико-группового анализа дифференциальных уравнений (Овсянников, 1978). В настоящее время отношение к этому двоякое. С одной стороны, всякое точное решение описывает точные свойства течения. С другой стороны, всякое точное решение, равно как и всякая интегрируемая система уравнений, не описывает турбулентного режима течения.

Выдающийся русский гидродинамик А. А. Никольский ушёл в бессмертие в расцвете таланта, так и не дождавшись, когда Время догонит его.

В.6. ... и другие

После Октябрьской революции 1917 года большевики разогнали парламент (Учредительное собрание), запретили деятельность демократических партий и 5 сентября 1918 года объявили о «красном терроре», ввели единомыслие — одну пошлую мысль на всех. Стали создавать концентрационные лагеря для инакомыслящих, систему доносительства и заложничества, жертвами которой стали сотни тысяч людей, прежде всего — деятели науки и культуры. Началось осуществление одной из крупнейших репрессивных акций тоталитарного режима.

В условиях складывающейся обстановки страха и террора Россию покидают представители российской интеллигенции, в том числе деятели науки, техники и высшей школы. Они устремились к границам, образовав так называемую *первую волну эмиграции*, пик которой пришёлся на 1920–1925 годы и которая по официальным подсчетам, в целом, составила 1 млн. 160 тыс. человек. Отплывали «философские пароходы». Беженцы пробирались на Запад разными путями: одни — через Одессу, другие — через Китай.

Эмиграция помогла сохранению российской интеллектуальной элиты, развитию искусства, науки и техники. С другой стороны, синтез евроамериканской и русской культур способствовал прогрессу западной цивилизации. «Мы не в изгнании, — гордо говорил И. Бунин, — мы в послании».

Одна часть эмигрантов осталась в Европе, надеясь на скорый конец большевизма; другая часть, уверенная в собственных силах и в способности выжить в непривычных условиях жёсткой конкуренции, устремилась в Америку. Именно здесь обосновалась блестящая плеяда деятелей российской авиационной науки и техники (см. Шелохаев, 1997).

После фирмы Сикорского, ставшей центром русских эмигрантов-инженеров, самой заметной на Западе была авиафирма А. Н. Прокофьева-Северского, бывшего капитана Балтийского флота, георгиевского кавалера, изобретателя автоматического бомбового прицела и устройства для дозаправки самолёта в воздухе. Его преемник А. М. Картвели, бывший русский офицер-артиллерист, построил один из лучших истребителей Второй мировой войны «Тандерболт», поставлявшийся в рамках военной помощи во многие страны, включая Россию.

На фирме М. Струкова, бывшего капитана царской армии, создавались тяжёлые транспортные самолёты. Основоположник динамики полёта, бывший профессор Петербургского университета Г. А. Ботезат создал в 1922 году вертолёт (тогда говорили — геликоптер), впервые принятый на вооружение армией США. Русский инженер И. Махонин построил во Франции самолёты с изменяемой геометрией. За рубежом в полной мере раскрылись таланты учеников Жуковского: конструктора вертолётов Н. Флорина, инженера М. Ваттера, основателей ЦАГИ И. А. Рубинского и Г. И. Лукьянова. Колчаковский офицер Александр Александрович Никольский стал непревзойдённым специалистом по теории винтокрылых аппаратов, основоположником вертолётного образования в США.

Жуковский за границу не уехал: ему шёл восьмой десяток. Кроме того, у него было своё большое дело — ЦАГИ, мечта о воссоздании российской авиации.

По мере укрепления диктатуры Сталина случаи высылки за границу стали единичными — этот палач предпочитал «мочить» ни в чем неповинных людей, морить в ГУЛАГе и даже топить в морях баржи с заключенными[1].

[1]Такие случаи не описаны А. И. Солженицыным. Однако это была система, заслуживающая дальнейшего изучения. Моего деда, Матвея Федоровича Бетяева, потопили вблизи Соловецких островов; пароход, который вёз из заключения уже отбывшего срок

В 1937–38 годах многие ученые попали в ГУЛАГ, затем — в сталинские «шарашки». В тюрьмы и концлагеря перед Второй мировой войной было брошено около 300 авиационных специалистов. Их мучили на допросах, а затем тех, кто выжил, заставили проектировать нелепый самолет по заданию сталинского палача Л. П. Берия. Как издевались над известным русским гидродинамиком К. И. Страховичем (1904–1968), рассказал А. И. Солженицын в книге «Архипелаг Гулаг». После войны Страховича выпустили, и он работал в казанской *шарашке* В. П. Глушко (см. Голованов, 1994, с. 325). Его труды издали в 1980 году. Один из создателей ЦАГИ Б. С. Стечкин дважды подвергался необоснованным репрессиям, работал в шарашках в 1930–1933 и 1937–1943 годах.

Был разрушен верхний «озоновый» слой специалистов-авиастроителей. В развитии ракетной техники мы уже тогда вырвались вперед. В созданной в 1930 году Газодинамической лаборатории были разработаны реактивные снаряды — прообразы знаменитых «катюш». Обоих руководителей этих разработок Лангемака и Клейменова арестовали в 1937 году и тут же расстреляли (Шифаревич, 2000, с. 129–130). Был арестован и работающий в той же лаборатории С. П. Королев (Голованов, 1994). Таубина, создателя первой авиационной пушки, расстреляли в 1939 году, погиб в тюрьме изобретатель реактивно-динамических пушек Курчевский. *Выдающийся конструктор авиационной техники* П. И. Гроховский погиб в ГУЛАГе.

Конструкторское бюро А. Н. Туполева было разделено на три основные авиационные *шарашки*: самого Туполева, В. М. Мясищева и В. М. Петлякова. Незавидна судьба и других авиаконструкторов: Р. Л. Бартини дали срок в 10 лет, К. А. Калинин в тюрьме сошел с ума и был расстрелян.

А. А. Витт, ученик А. А. Андронова, расстрелян в печально знаменитом 1937 году. В этом же году издавалась книга Андронова, Витта, Хайкина «Теория колебаний». Витта пришлось исключить из авторов. Лишь в 1959 году при переиздании этой книги его имя появилось на обложке.

Только в ЦАГИ расстреляли начальника ЦАГИ Н. М. Харламова, начальника 8 отдела В. И. Чекалова и заместителя начальника отдела подготовки кадров Е. М. Фурманова. Заместитель начальника ЦАГИ А. И. Некрасов был подвергнут аресту с 1937 по 1943 год. Специалистов не хватало. Дело дошло до того, что в 1940 году Учёный совет ЦАГИ

дядю моей жены, взорвали при выходе из бухты Нагаево на глазах у многочисленных свидетелей.

возглавил балтийский матрос Иван Петров, штурмовавший, по его рассказам, Зимний дворец в 1917 году. В его подчинении находились... С. А. Чаплыгин и другие выдающиеся учёные института.

История *научного ГУЛАГ'а* настолько обширна, что заслуживает отдельного рассмотрения. Как говорил В. О. Ключевский: «История ничему не учит. История наказывает за невыученные уроки». В связи с этим особенно поражают наши успехи в математике, физике, самолётостроении и в освоении космоса! Время было трагическим и героическим сразу! Вот победная летопись наших мировых достижений.

* Взрыв термоядерного заряда — 12 августа 1953 года.
* Запуск искусственного спутника Земли — 4 октября 1957 года.
* Полет человека в космос — 12 апреля 1961 года.

Были ли мы лидерами в космонавтике? В 1950–1960-х годах, бесспорно, были, так как первыми запустили спутник земли и человека в космос.

Были ли мы лидерами в авиации? На этот вопрос ответить труднее, потому что нет количественных оценок. Принято считать, что к концу XX века Россия занимала 1–2 место в мире по развитию военной авиации и 2–3 место в мире по развитию гражданской авиации, конкурируя с США и Европой.

К депортации инакомыслящих вернулись в годы правления Л. И. Брежнева, с 1966 года по 1988 принудительно лишились гражданства свыше 170 человек.

Вторая волна научной эмиграции прошла после революции 1991 года. Между двумя волнами в условиях «железного занавеса» на Запад проникали лишь отдельные учёные. Г. А. Гамов, физик-теоретик, ученик Фридмана, остался там после заграничной командировки в 1933 году. В 1977 году с целью вызволения В. Г. Левича, одного из основоположников физико-химической гидродинамики, ученика Ландау, и в честь его 60-летия Оксфордский университет организовал международную конференцию по проблемам физической химии. Замысел удался — в 1978 году Кремль отпустил Левича в Израиль как узника совести. Е. А. Новиков, ученик Обухова, остался в Японии после состоявшейся там конференции по гидродинамике в 1982 году, затем переехал в Америку.

Во второй волне эмиграции оказались почти все известные гидродинамики России: М. А. Гольдштик, М. Г. Гоман, А. Л. Гонор, Г. М. Заславский, В. Р. Кузнецов, А. А. Красовский, А. И. Рубан, О. С. Рыжов, В. А. Сабельников, С. Н. Тимошин, В. Н. Тригуб, В. Н. Штерн, С. И. Чернышенко. Вторая эмиграция происходила в условиях свободного пере-

мещения умов. В связи с падением «железного занавеса» понятие эмиграции сегодня полностью утратило своё прежнее значение[1]. Средства информации стали такими, что проживание в любой точке земного шара обеспечивает доступ к открытому знанию, коим является фундаментальная наука.

Российская наука постарела — средний возраст учёного, работающего в военно-промышленном комплексе, превысил пенсионный[2]. Невзирая на это в России должны развиваться авиация, поскольку нам дана 1/7 часть всего неба, и кораблестроение, поскольку мы имеем выход в два океана, и автомобилестроение, поскольку мы стоим на двух частях света... И не на основе лизинга иностранных самолетов, а на основе развития собственной прикладной науки и промышленности!

Неоценим вклад в гидродинамику математиков (Г. И. Марчука, В. П. Маслова, Н. Н. Яненко) и физиков (В. Е. Захарова, Я. Б. Зельдовича, П. Л. Капицы, Л. Д. Ландау, Ю. Л. Климонтовича, школы А. В. Гапонова-Грехова в Нижнем Новгороде).

В Московском университете не было единой гидродинамической школы. Однако здесь работали выдающиеся ученые.

Л.И.Седов (1907–1999), ученик Чаплыгина, сначала работа в ЦАГИ, а затем стал заведующим кафедрой гидромеханики Московского университета. Он развил теорию одномерных автомодельных течений, в замкнутой форме получил решение задачи о сильном точечном взрыве в идеальном газе, внес вклад в аксиоматику механики сплошной среды и в релятивистскую механику.

---

[1]Российская культура отличается как от Западной, так и от Восточной. Поэтому смена местожительства не проходит для россиянина бесследно. Где-то между 30 и 40 годами существует предельный возраст, после которого переезд в другую страну становится трудным и даже невозможным. *Монокультурный* эмигрант трудно вписывается в чуждую ему цивилизацию.

[2]В. И. Арнольд (1997б) считает, что пик творчества учёного приходится на 27 лет. Н. Бурбаки увольняет из своего коллектива людей, достигших 50 лет. Разумеется, каждый учёный имеет свой критический возраст, когда творческая активность достигает максимума. Следовательно, существует и осреднённый по всему сообществу учёных возраст максимальной активности. На самом деле ситуация более сложна: есть несколько «особых точек» в научной деятельности. Примерно после 30 лет оканчивается фаза творческой активности, после 40 лет — фаза понимания *принципиально нового*, после 50 лет — фаза творческого преподавания, после 60 лет — фаза идейного руководства научной лабораторией. И как ни печально это констатировать — наступает фаза, когда человек начинает препятствовать внедрению новых идей.

Считается, что средняя продолжительность жизни научных монографий — 25 лет, *а научных статей* — 5 лет. Однако выдающиеся монографии и статьи живут вечно. Древняя мудрость гласит: «Habet sua fata libelis in capitia lectores» («Книги имеют свою судьбу в головах читателей»).

А. А. Ильюшин (1911–1998) заведовал кафедрой упругости механико-математического факультета в том же Московском университете, участвовал в разработке проектов по созданию советских атомной и водородной бомб. Независимо от Цяня (1946) установил закон плоских сечений в теории гиперзвуковых течений. В примечании к его статье, опубликованной в 1956 году, указывается, что она была напечатана в 1948 году в ограниченном числе экземпляров с грифом «секретно»; задержка в публикации связана с секретностью. Учебник Ильюшина по механике сплошных сред выдержал три издания и до сих пор сохраняет актуальность.

Саратовская школа гидродинамики включала С. В. Фальковича и его ученика Б. М. Булаха. Фалькович вместе с Ф. И. Франклем, Т. Карманом, К. Г. Гудерлеем, А. А. Никольским заложил основы теории трансзвуковых течений. «Околозвуковой закон подобия Кармана – Фальковича», «переменные Фальковича» — теперь эти понятия знакомы всем специалистам по газовой динамике (см. Шифрин, 2001). Булах является одним из основателей теории нелинейных конических течений (Булах, 1970).

В конце XX века российская аэродинамика вместе с самой Россией вступила в полосу кризиса. Общий кризис гидродинамики обусловлен нехваткой идей, кризис гидродинамики в России, кроме этого, обусловлен нехваткой кадров. Хотя, в отличие от учёных, авиаинженеры не уехали на Запад в поисках счастья, произошла так называемая *внутренняя эмиграция* — молодые специалисты ушли в бизнес. Из-за внешней и внутренней эмиграции в 1990-х годах мы потеряли около 1 млн ученых. Распалась связь времён, средний возраст российских авиаинженеров превысил критический. Можно только гадать, возродится ли в России авиация, столь необходимая для возрождения страны...

Авиация достигла преклонного возраста — ста лет. Аэродинамическое проектирование и прикладная гидродинамика в XXI веке превратились в обычные ремёсла. Создание самолета или корабля, как и автомобиля, поставлено на поток. В теоретической гидродинамике проблема турбулентности еще не решена, однако она раздражает скорее математиков, чем гидродинамиков.

Стареют не только люди, но и науки...

Приложение С

Опыты в ванной

Опыты в ванной — это «малые опыты», большинство из которых можно провести дома, как говорил выдающийся экспериментатор Р. Вуд, с помощью «... палки, верёвки, сургуча и слюды». Галилей сделал мировые открытия с помощью наклонной доски, шарика и водяных часов[1]. О другом гениальном экспериментаторе М. Фарадее Гельмгольц сказал так: «Старые куски проволоки и железа кажутся ему достаточными для того, чтобы идти к величайшим открытиям».

Интересна история популярной науки. Родоначальницей современной популярной литературы следует считать многократно переизданную книгу М. Фарадея «История свечи». Фамилии многих знаменитых популяризаторов науки почему-то начинаются на букву «ф»: К. Фламмарион («Популярная астрономия»), Ж. А. Фабр («Жизнь насекомых»), А. Е. Ферсман («Занимательная минералогия»).

Первым популяризатором в России был К. А. Тимирязев («Жизнь растения»). Он говорил так: «Пара здоровых глаз да при случае хорошее увеличительное стекло — вот всё, что нужно для того, чтобы видеть внешние формы наших обычных растений». К шедеврам мирового значения следует добавить «Занимательную физику» Я. Перельмана и «Занимательную теорию музыки» Г. Виноградова и Е. Красовской.

«Опыты в ванной» — это простые картинки для объяснения сложных явлений. С этой целью многие из них используются в синергетике, физике и даже в философии. В узком смысле слова «опыты в ванной» — это гидродинамические опыты. Признанными мастерами в этом деле были Р. В. Поль (1971) и Дж. Уолкер (1989). С 1977 по 1990 год почти в каждом номере журнала «Scientific American» появлялись замечательные статьи Уолкера, посвящённые гидродинамическим или оптическим опытам[2].

[1] А великий И. П. Павлов использовал для этой цели верёвочки, трубочки и метроном.

[2] Прекрасные популярные книги по математике написаны сотрудником Института Санта-Фе Джоном Касти (2000).

Мы не касаемся вопросов физического моделирования, так как в учебниках по общей физике (см., например, Сивухин, 1990) подробно описаны классические опыты Ж. Перрена по определению постоянной Больцмана, доска Гальтона, опыты М. Борна и Е. Бормана по определению длины свободного пробега, эффект Кнудсена, радиометрический эффект и многое другое.

История биографической литературы должна включать такие шедевры, как книга С. И. Вавилова (1989) о Ньютоне, книга А. Пайса (1989) об Эйнштейне и др.

С.1. Вращающиеся тела

Колесо, турбина, миксер, лопасть винта — вращающиеся в воздухе и в жидкости тела окружают нас на каждом шагу. Хотя сложные гидродинамические явления, сопутствующие вращению тел, до конца не разгаданы, их моделирование легко осуществить дома или в поле за городом.

Опыты Магнуса

Первые опыты по исследованию обтекания вращающегося цилиндра поставил немецкий физик и химик, профессор Берлинского университета Генрих Густав Магнус (1802–1870). Он открыл эффект возникновения поперечной силы, действующей на вращающееся и одновременно движущееся поступательно тело. В те далёкие времена стволы артиллерийских орудий не имели нарезки, придающей снаряду устойчивое вращение, поэтому полёт пушечного ядра был неустойчивым, даже в безветренную погоду его траектория сильно отклонялась от расчётной. Прусские артиллеристы в 1852 году обратились к Магнусу с просьбой объяснить это явление. Магнус сразу же догадался, что причиной такого поведения ядер служило их вращение, приобретаемое при вылете из ствола вследствие случайных причин. Только спустя полвека после теоретических исследований Н. Е. Жуковского стало ясно, что эта загадочная сила имеет такое же происхождение, как и подъёмная сила птичьего или самолётного крыла!

Эффект Магнуса более полно проявляется в опытах с продолговатыми телами типа цилиндра, чем с круглыми телами типа пушечных ядер. Его можно продемонстрировать с помощью лёгкой картонной катушки с намотанной полотняной лентой, свободный конец которой прикреплён

к палочке. Если эту палочку дёрнуть вбок в горизонтальном направлении, то катушка приобретёт горизонтальную составляющую скорости. Вместе с тем разматывающаяся лента придаст катушке вращение. Возникшая при этом подъёмная сила заставит скатившийся со стола цилиндр описать в воздухе замысловатую петлю.

Можно ещё более упростить опыт, приведя лёгкий цилиндр в быстрое вращение руками, а затем отпустив его в свободное падение. Траекторией падения цилиндра окажется не вертикальная прямая, а пологая кривая. Кроме силы тяжести и подъёмной силы, перпендикулярной к направлению движения, на него будет действовать ещё сила сопротивления, направленная против движения. Равнодействующая этих трёх сил отклоняет траекторию цилиндра от вертикали. При некотором навыке аналогичный опыт удаётся провести и с продолговатой прямоугольной пластиной, вырезанной, например, из картона.

Качественное объяснение природы этой загадочной силы дал ещё И. Ньютон в 1671 году: «Я часто видел, как теннисный мяч при ударе ракеткой описывает кривую. Когда такой удар вызывает и поступательное, и вращение движение, части мяча с той стороны, где движения совпадают, должны давить на прилегающий воздух сильнее и возбуждать пропорционально большее сопротивление и противодействие воздуха». Кстати, впоследствии было установлено, что сила, действующая на рифлёный мяч, почти в два раза превосходит силу, действующую при тех же условиях на гладкий мяч. Такой удивительный эффект объясняется тем, что рифлёный мяч передаёт окружающему его воздуху гораздо больший момент количества движения, чем гладкий мяч.

Самовращение

Круглый цилиндр закрепите так, чтобы он мог свободно вращаться вокруг своей оси при несимметричном обтекании струёй воды. В какую сторону будет вращаться цилиндр? «Здравый смысл», то есть наш жизненный опыт, подсказывает, что он будет вращаться в ту сторону, в какую его раскручивает толстая часть струи. Однако цилиндр не всегда вращается в естественно ожидаемом направлении! При некоторых специально подобранных значениях параметров он вращается в противоположном направлении.

Такое самовращение цилиндра происходит относительно оси, перпендикулярной к направлению скорости его движения. Другой случай — вращение тела вокруг продольной оси — подобен вращению крыльев ветряной мельницы. Самовращение крыльев мельницы, падающего семени

клёна, винта вертолёта в режиме *авторотации* неудивительно — на их лопасти действуют силы, каждая из которых вносит положительный вклад в создание вращательного момента. Парадоксально самовращение симметричного тела, когда имеет место парадокс неединственности: наряду с самовращательным движением виртуально существует и невращательное движение. Самовращение прямоугольного крыла, установленного под углом атаки α, впервые обнаружил в 1906 году Н. Е. Жуковский. Крыло-пластинка укреплялось в центре тяжести на оси, совпадающей с направлением скорости невозмущённого потока, таким образом, чтобы при вращении крыла вокруг этой оси угол атаки α не изменялся. Вращающий момент создавался, если подъёмная сила убывала с ростом угла атаки. Такая зависимость наблюдалась при достаточно больших значениях α. В авиации самовращение проявляется в виде штопора — неуправляемого снижения интенсивно вращающегося самолёта.

Гироскопический эффект

Хотя возраст бумеранга — метательного орудия в виде серповидной доски — равен трём тысячам лет, механизм его полёта был установлен лишь в 70-х годах прошлого столетия. На бумеранг, как и на всякое подобно гироскопу быстро вращающееся тело, кроме гидродинамических сил действуют ещё и гироскопические силы — его ось прецессирует вокруг вертикали.

Невращающийся снаряд под воздействием силы тяжести и силы сопротивления воздуха, направленной примерно противоположно скорости движения центра тяжести и приложенной несколько выше его, опрокидывается, дальность стрельбы значительно уменьшается из-за возрастания силы сопротивления. Чтобы снаряд стал устойчивым в полёте и попадал в цель головной частью, он предварительно — об этом уже говорилось — закручивается в стволе орудия, где для этого нарезана резьба. Такой принудительно вращающийся снаряд подобно бумерангу прецессирует вокруг прямой, направленной по скорости его движения, то есть вокруг касательной к траектории центра тяжести. Кстати, Земля тоже является гигантским гироскопом, совершающим прецессию. Однако проявление прецессии ослаблено — внутри Земли находится жидкая среда. Представление о таком движении можно получить с помощью простого опыта: залить внутрь детского, предварительно загерметизированного волчка некоторое количество воды и запустить его. Если вращающуюся игрушку на мгновение притормозить пальцем, то продолжающая вращение жидкость вновь раскрутит её. Тот факт, что тело, заполненное жидкостью, противится вращению, мы каждый раз ощущаем, когда, вращая

на столе яйцо, пытаемся определить, сырое оно или варёное. Варёное яйцо вращается «стоя», сырое — нет.

Гироскопические силы действуют и на игрушку, называемую *летающей тарелкой*. Она пролетает расстояние вплоть до 200 метров и способна возвращаться. Конструкторы постоянно совершенствуют эту игрушку. В 1980-х годах в продаже появились летающие кольца, покрывающие расстояния вплоть до 400 метров. С 1990 года в продаже находится *летающий орбитер*, представляющий собой равносторонний треугольник с «крылышками» в каждой вершине. Траектория орбитера тоже может быть возвращающейся, но, чтобы научиться бросать его с возвратом, необходима многочасовая практика.

Вихри Тейлора

Не менее интересно наблюдать за течением жидкости, находящейся между двумя коаксиальными цилиндрами, вращающимися вокруг своей оси x. При малой скорости вращения (малой закрутке потока) течение не зависит от x. С увеличением закрутки течение становится периодическим по x. Наконец, при большей закрутке появляются азимутальные волны, а затем течение становится турбулентным (Ван-Дайк, 1986).

С.2. Вращающиеся потоки

Простые опыты с вращающейся жидкостью демонстрируют самопроизвольное возникновение фотогеничных вихревых структур, а также удивительное взаимодействие вращательного и поступательного движений.

Вихри Россби

Движение воздуха в атмосфере происходит под действием его неравномерного прогревания, вращения Земли и силы тяжести. Атмосферные вихри подразделяются на короткоживущие и долгоживущие. На короткоживущие (порядка нескольких часов) вихри вращение Земли существенного влияния не оказывает. Примером такого образования является смерч.

Наоборот, на наиболее крупные и долгоживущие вихри в океанах и атмосферах планет вращение Земли оказывает существенное влияние. Они называются вихрями Россби в честь выдающегося шведского геофизика Карла Густава Россби (1898–1957), который обнаружил фундаментальную роль таких вихрей в динамике океана и в глобальной

циркуляции атмосферы. Планетарные течения, такие как Гольфстрим, Куросио, — всё это вихри Россби. Большое Красное Пятно Юпитера, как и Ультрафиолетовое Пятно Сатурна, — это тоже вихри Россби.

Возможно ли моделирование вихрей Россби в лабораторных условиях? Оказывается, возможно, хотя и не так просто, как воспроизведение смерча (Незлин, Снежкин, 1990).

Столбы Тейлора – Праудмена

Как показал в 1916 году известный гидродинамик Дж. Праудмен, при наложении на вращающуюся жидкость медленного поступательного движения, направленного по оси вращения, любая жидкая линия, первоначально параллельная оси вращения, в процессе движения так и останется параллельной оси; продольное и поперечное течения разделяются, причём характеристики обоих течений не зависят от осевой координаты, течение уподобляется плоскому. Серию блестящих опытов на эту тему предложил всё тот же Дж. Тейлор (Бэтчелор, 1973).

Если во вращающейся жидкости медленно продвигать тело по оси вращения, то, в соответствии с правилом Праудмена, за телом и перед ним образуются две параллельные оси вращения — цилиндрические колонны, движущиеся вместе с телом, как жёсткое целое. Такие образования называются колоннами или столбами Тейлора. Специальный случай колонн Тейлора возникает при обтекании быстро вращающейся сферы вокруг оси x, совпадающей с направлением невозмущённого потока. В этом случае перед сферой и за ней должны образовываться два простирающихся теоретически до бесконечности столба Тейлора. В реальных условиях из-за наличия вязкости и инерции жидкости столбы имеют конечную длину. С увеличением вязкости сначала исчезает кормовой, а затем носовой столбы. Впрочем, в этом вопросе ещё много неясностей.

Опыт первый. Если аккуратно влить небольшое количество чернил в покоящийся стакан воды, то они образуют сверху подкрашенный слой. Но если поставить наполненный водой стакан соосно на вращающийся диск проигрывателя, слегка её размешать, а затем капнуть в него чернил на некотором расстоянии от оси, то чернила вытянутся в тонкую цилиндрическую пелену, что подтверждает правило Праудмена о единообразии картины течения вдоль оси вращения. В зависимости от условий помешивания в поперечной плоскости образуется равномерная или хаотическая чернильная траектория.

Опыт второй. В существовании колонн Тейлора можно убедиться, если измерить времена всплытия достаточно лёгкого шарика со дна

вращающегося и невращающегося стакана с водой. Время, измеренное в первом случае, окажется в несколько раз больше измеренного во втором случае, ибо всплывающему во вращающемся сосуде шарику приходится проталкивать вверх длинный столб Тейлора, что значительно увеличивает силу сопротивления его движению. Чтобы наблюдать вращение шарика, Тейлор раскрашивал его полосами.

Опыт третий и последний. Непосредственное наблюдение столба Тейлора можно осуществить, протаскивая какое-либо твёрдое тело по дну вращающегося бассейна с водой. Если при этом впрыскивать краску на некоторой высоте перед движущимся телом, то она будет обтекать невидимый жидкий цилиндр — столб Тейлора, — раздваиваясь на его поверхности, как будто жидкий цилиндр является твёрдым телом. Если же краску выпускать над телом, то она останется внутри столба Тейлора, перемещаясь вместе с ним. Параметрический переход к турбулентности сопровождается возбуждением волн.

С.3. Смерч у нас дома

Смерч — это мощный мезомасштабный короткоживущий вихрь в тропическом кольце атмосферы. Будучи одним из главных носителей хаоса в движении воздушных масс, он многолик в проявлении и поэтому имеет так много названий: торнадо (Северная Америка), тропический циклон (циклон по-гречески — это «кольцо змеи»), ураган (от французского слова ouragan — сильный ветер), тайфун (от китайского «тай фын» — большой ветер). Смерч над сушей часто называют тромбом (греческое trómbos — сгусток). Б. Пастернак явно преувеличил время жизни смерча:

Больной следит. Шесть дней подряд
Смерчи беснуются без устали,
По кровле катятся, бодрят,
Бушуют, падают в бесчувствии.

Настоящий смерч сметает всё на своём пути.

Микросмерч легко наблюдать в только что открытой бутылке минеральной воды, если поставить её в центр вращающегося диска и бросить на дно кусочек сахара или другого кристаллического вещества. Кристаллики способствуют выделению углекислого газа, так как служат ядрами образующихся газовых пузырьков. Выделение пузырьков наиболее интенсивно происходит при пониженном давлении. На оси вращающейся

жидкости, как и в смерче, давление понижено. Поэтому пузырьки возникают преимущественно в центре бутылки. Двигаясь спирально вверх под действием силы плавучести, они увлекают за собой частицы воды. На их место по дну бутылки к центру притекают другие порции *минералки*, образуя смерч.

Некое подобие смерча реализуется в промышленной установке «циклон», предназначенной для очистки потоков газа от твёрдых и жидких частиц, — важной народнохозяйственной задаче, служащей делу сохранения окружающей среды и создания передовых технологий. Лабораторное моделирование смерча воспроизводит, по меньшей мере, два его важных чисто механических свойства: вращение жидкости и её поднятие (или опускание). Вращение жидкости создаётся либо пропеллером, либо вращением стенок сосуда, а поднятие — с помощью насоса или за счёт силы плавучести.

Если вентилятор, размещённый над резервуаром с водой, привести в движение, то он закрутит расположенный под ним столб воздуха, внутри которого давление окажется пониженным. Ввиду этого вода из резервуара поднимется на некоторую высоту и, закрученная окружающим воздухом, создаст подобие искусственного *водяного* смерча. В качестве вентилятора пригодно колесо с наклонёнными вертикальными перегородками. В зависимости от мощности вентилятора высота «смерча» может изменяться от нескольких сантиметров до нескольких метров. Подобное устройство для создания искусственного смерча известно уже более двух веков. Аналогичным образом воссоздаются *пылевые* и *песчаные* смерчи.

Налейте в поллитровую стеклянную банку воду и раскрутите её каким-либо образом, например, миксером. Небольшой нагрев в центре дна банки инициирует вертикальный вихрь, который легко визуализируется с помощью краски. Вблизи дна наблюдается так называемый «взрыв вихря» — резкий переход от упорядоченного течения к хаотическому.

Существует много удивительных разновидностей вихрей, напоминающих смерч. Вблизи извергающихся вулканов, лесных пожаров и больших костров образуются *огненные* смерчи. Зимой над незамерзающим озером иногда удаётся наблюдать *туманный* вихрь. Дома его можно воспроизвести, пустив струю холодного воздуха над поверхностью тёплой воды, наполняющей ванну. Такие же вихорьки появляются на поверхности вынесенного на мороз горячего чая. Они образуются вследствие неустойчивости влажного тёплого воздуха, расположенного над холодным.

Буря в стакане воды

Кстати, о чае. Почему чаинки собираются в центре стакана после того, как их раскрутили ложкой? Этот вопрос занимал даже Альберта Эйнштейна, которому и приписывают авторство опыта с чаинками. Не исключено, что здесь сработал «эффект громкого имени», и приоритет приписан выдающемуся учёному, но теперь мы не можем уверенно сказать, что же произошло на самом деле. В любом случае объяснение Эйнштейна, опубликованное в 1926 году в журнале «Naturwissenschaften», заслуживает того, чтобы его привести: «Я начну с небольшого эксперимента, который каждый может легко повторить. Представим себе чашку с плоским дном, полную чая. Пусть на дне её имеется несколько чаинок, которые остаются там, так как оказываются тяжелее вытесняемой ими жидкости. Если с помощью ложки привести во вращение жидкость в чашке, то чаинки быстро соберутся в центре сосуда. Объяснение этого явления заключается в следующем... Слои жидкости, находящиеся по соседству со стенками чашки, задерживаются благодаря трению, так что угловая скорость вращения... будет вблизи дна меньше, чем вдали от него. Результатом этого явится круговое движение жидкости, которое возрастает до тех пор, пока под влиянием трения не станет стационарным. Чаинки сносятся в центр круговым движением, что и доказывает его существование».

В своём письме к Эйнштейну один из основоположников квантовой механики Э. Шрёдингер, называя это объяснение «очаровательным», не удержался от весьма нестандартного комплимента основателю теории относительности: «Случайно, несколько дней тому назад, моя жена расспрашивала меня о «феномене чашки чая», но я не сумел дать разумное объяснение. Она говорит, что теперь никогда не сможет перемешивать чай, не вспоминая Вас».

Но вернёмся непосредственно к опыту с чаинками. Хотя точного расчёта движения чаинок не имеется, качественные соображения просты (Лагт, 1983; Фабер, 2001). «Мокрые» чаинки, плотность которых больше плотности воды, находятся на дне стакана и поэтому при своём движении испытывают силу трения о стекло. Вращаются они вблизи центра чашки, образуя как бы «пояс астероидов». Ширина «пояса» зависит от степени неоднородности чаинок: чаинки разных размеров и масс вращаются по окружностям разных радиусов. Лишь на заключительной стадии торможения они собираются в центре. Это происходит благодаря тому, что на дне чашки круговое течение направлено к центру, и оно туда же «подметает» чаинки. Почему так направлено круговое течение?

Потому что при уменьшении скорости вращения свободная поверхность, имеющая форму параболоида вращения, стремится снова стать плоской.

Слив воды в ванне

Все мы видели удивительный короткоживущий вихрь, образующийся при сливе воды в ванне и расположенный вертикально над сливным отверстием. Простые наблюдения показывают, что форма свободной поверхности — границы жидкости с воздухом — зависит от параметра σ, равного отношению высоты воды в ванне к радиусу сливного отверстия. Не ясно, постепенно ли образуется вихрь с уменьшением этого параметра или внезапно при некотором фиксированном его значении. Если значение σ достаточно велико, то на свободной поверхности образуется небольшая впадина. При некотором критическом значении σ^* полость вихря достигает дна ванны, а затем проникает в вытекающую струю.

Кроме параметра σ, на течение жидкости влияет её вязкость, точнее говоря, безразмерный параметр $\beta = gr^3\nu^2$, где g — ускорение свободного падения, ν — коэффициент кинематической вязкости. Это влияние существенно лишь при малых значениях радиуса r, когда он составляет доли миллиметра. Однако в этом случае полый вихрь не образуется.

В какую сторону вращается полый вихрь? Это зависит от тех условий, которые сопутствовали его возникновению. Влияет ли на направление вращения вихря сила Кориолиса, вызванная вращением Земли? Разумеется, влияет: в ещё незакрученном течении на движущуюся в сток с севера на юг, как и на движущуюся в сток с юга на север, струйку тока действует кориолисова сила, стремящаяся закрутить водоворот в северном полушарии против хода часовой стрелки, а в южном полушарии — по ходу часовой стрелки. Теоретически эти рассуждения правильны. Однако реальное влияние вращения Земли на знак вихря в ванне, как и на движение всех смерчевидных вихрей, оказывается пренебрежимо малым. Первопричиной «выбора» того или иного направления вращения является асимметрия в конструкции и установке ванны и в отводящих воду устройствах, — и это влияние ещё совсем не изучено. Искусственно в одной и той же ванне можно организовать вихрь как одного, так и другого знака. Воздух внутри воронки тоже приводится во вращение благодаря тому, что на свободной границе частицы воды увлекают за собой соседние частицы воздуха. Поэтому вихрь в ванне является воздушно-водяным. Правда, из-за того, что плотность воздуха почти в тысячу раз меньше плотности воды, его движение незаметно — оно может, разве что, сдуть пламя внесённой в воронку горящей спички.

Вихревые воронки наблюдаются в реках. На практике они применяются в суспензионном литье для ввода добавок в жидкий металл, а также в нефтехимической промышленности для удаления плавающих гранул со свободной поверхности. Опыты по поглощению воронкой твёрдых плавающих тел легко провести в ванне, используя для этих целей частицы различного веса. В результате таких опытов обнаружено, что твёрдые плавающие частицы могут довольно устойчиво вращаться вокруг воронки, каждая по своему индивидуальному радиусу, не всплывая и не погружаясь.

Принципиально новое явление наблюдаются в контейнере с водой, содержащим два симметрично расположенных сливных отверстия А и Б. В этом случае характеристики течения зависят ещё от одного безразмерного параметра $\alpha = l/r$, где r — радиус отверстия, l — расстояние между отверстиями. При достаточно больших значениях α образуется два вихря. При умеренных значениях α режимы попеременно чередуются: безвихревое истечение в окрестности отверстия Б сменяется вихревым, в то время как вихревое истечение в окрестности отверстия А становится безвихревым (Ширайши, 1994). Процесс оказывается почти *периодическим по времени*.

Что будет, если взять контейнер с тремя отверстиями? С четырьмя? Детали такого течения не известны, но ясно одно — разнообразие режимов увеличится, роль случайного начала усилится. Взаимодействие вихревого и вращательного движений демонстрирует структурную сложность течений, неразделимость закономерного и непредсказуемого, познаваемого и непознаваемого. Простые опыты по истечению жидкости подтверждают *фундаментальный закон гидродинамики*, в соответствии с которым течение перестраивается от простого стационарного к сложному, а затем — к нестационарному и далее — к неупорядоченному.

Эффект Ранка

Другое неожиданное явление открыто в 1931 году английским физиком Ранком при исследовании процесса в циклоне-пылеуловителе. Заключается оно в том, что сильно закрученный поток в трубе разделяется на два, один из которых — пристеночный — имеет гораздо более высокую температуру, чем другой — центральный. При исходной комнатной температуре приосевое ядро потока можно охладить до $-200°$ С. Доказано, что эффект Ранка вызван турбулентным характером течения, но его природа до конца не выяснена (Гольдштик, 1981; Гуцол, 1997).

С.4. Капли, струи и другие образования

Трехмерные гидродинамические структуры определяются тремя размерами l_j ($j = 1,2,3$). Их геометрическая классификация зависит от порядкового соотношения l_j и характерного масштаба задачи L: пленка ($l_1 \ll l_2 \sim l_3 \sim L$); струя, след ($l_1 \sim l_2 \ll l_3 \sim L$); капля ($l_1 \sim l_2 \sim l_3 \ll L$). Среда, из которой состоят эти структуры, может быть отлична от среды, в которую они погружены. В предельном устремлении меньших размеров к нулю капля стягивается в точку, струя — в линию, плёнка — в поверхность.

Замкнутый объём, ограниченный жидкой плёнкой и содержащий газ, называется *пузырём*. Образование и движение пузырей, в частности кавитационных, — увлекательное зрелище.

Всплеск — это выброс (обычно вверх) воды в виде струи или плёнки.

Брызги — это мириады разлетающихся капель, продукты распада струй, нагромождение пузырей. Водопады, опрокидывание волны, удар волны о скалу, падение метеоритов на твёрдую поверхность — все эти явления сопровождаются всплесками (Пенегрин, 1984). Всплески обычно распадаются на брызги. Механизмы брызгообразования разнообразны. Так, струя жидкости может дробиться на капли под действием турбулизации, неустойчивости Рэлея, капиллярной неустойчивости. Большие массы жидкости (свыше 100 грамм), не удерживаемые в целостности поверхностными силами, разбрызгиваются. Этот факт намного снижает эффективность тушения пожаров с помощью выброса большой массы воды из самолёта.

Всплеск в виде встречной струи, называемой *султаном*, появляется при падении капли на свободную поверхность.

Капли

Капли образуются в результате распада струи. Свисающая с потолка капля сначала вытягивается под действием силы тяжести, а затем на ней появляется сразу два (!) сужения, которые, разрываясь, образуют две капли (Сивухин, 1990). Первая, более крупная, пребывает в состоянии колебательного движения. Вторая, более мелкая, называется *шариком Плато*. Механизм образования двух капель ещё не понят, поэтому такое явление следует назвать *парадоксом Плато*. Это явление имеет общий характер. Так, при опадании короны, показанной на рис. 2.5, как и при падении капли на свободную поверхность, образуется султан. От него затем отделяется одна или две капли.

Если капля падает с малой высоты, то султан не образуется. Основные события происходят под поверхностью воды. Возьмите поллитровую банку воды и выдавите в неё из пипетки каплю чернил. Словно в подводном цирке, капля превратится в кольцевую, «репчатую», неустойчивую. Даже начнёт «размножаться» (Бэтчелор, 1973). Невольно приходит на ум аналогия с биологическим процессом: капля чернил ведёт себя подобно живой делящейся клетке. Может быть, это гидродинамическое явление представляет собой прообраз деления простейших форм живой праматерии?!

Ещё один пример на эту тему — кумуляция энергии в пробирке. Налейте немного воды в обыкновенную пробирку и, придерживая её рукой, чтобы сохранить вертикальное положение, дайте ей упасть с небольшой высоты на стол. Вогнутый мениск свободной поверхности воды быстро станет выпуклым, и из его центра стремительно вырвется вверх распадающийся на капли султан. Первая капля взлетит на высоту, существенно превосходящую высоту падения пробирки. Так перераспределяется энергия в пробирке. Напомним, что в кумулятивном заряде достигается вторая космическая скорость.

Столь же загадочен процесс дробления капли на более мелкие (см. Бетяев, 1995). Своеобразно движение капли жидкости по твёрдой поверхности под действием воздушного потока. Капля как бы обладает трением покоя: если действующая на неё суммарная аэродинамическая сила докритическая, то есть меньше некоторой критической величины, то капля лишь изменит свою форму, наклонившись по потоку, но не сдвинув свое основание относительно твёрдой поверхности. Угол смачивания будет изменяться вдоль замкнутой линии контакта. Под действием сверхкритической силы капля, обладающая переменной массой и формой, двигается по поверхности, оставляя на ней шлейф — тонкий след своего вещества. Шлейф простирается до той точки, где капля исчезает, полностью потеряв свою массу. Если на поверхность тела нанести специальную подложку например, тонкий слой масла, то шлейф исчезает.

Парадоксален эффект огибания каплей острой кромки пластины. Капля может огибать кромку «безотрывно», тогда как поток воздуха обязательно отрывается от кромки.

Струи

Жидкость, способную разбрызгиваться и образовывать кавитационные полости, называют *капельной*. Обычно её сжимаемостью можно

пренебречь. Типичным примером капельной жидкости является вода, типичным примером *некапельной* жидкости — воздух. Воздушная струя в воде быстро распадается на пузыри, поднимающиеся, в соответствии с законом Архимеда, вверх.

Пустите струю из водопроводного крана в отверстие плавающей в ванне пластины. Радиус отверстия r должен быть в несколько раз больше радиуса струи. Под воздействием волнения воды в ванной пластина будет беспорядочно двигаться, однако центр её отверстия не выйдет за пределы окружности радиуса r с центром на оси падающей струи. Траектории центра отверстия пластины хаотически заполнят эту окружность. Объяснение этому эффекту — хаосу на ограниченном участке площади! — простое: как только кромка отверстия попадает под струю, она резко отталкивается от неё под действием напора струи.

Падающая струя не всегда отталкивает предмет. Если выпуклой стороной чайной ложки прикоснуться к струе, то ложка притянется к струе. Дело в том, что при развороте струи на конечный угол возникает некоторый аналог подсасывающей силы, прижимающий ложку к струе.

Обратите внимание, что на небольшом участке над ложкой поверхность струи волнистая, образовалась рябь. Если подставить ложку или палец под всю струю, то рябь перейдёт в стоячую волну. Возмущение от препятствия распространяется против течения вплоть до крана. При перемещении ложки вниз и рябь, и стоячая волна исчезают.

Поместить вдоль оси струи воды спицу можно двояким образом: не нарушая осесимметричности течения и нарушая её. Во втором случае течение винтовое; если поворачивать спицу вокруг оси, струя будет как бы следовать за спицей, обвивая её. Удаётся получить два-три витка струи.

Струи могут *слипаться* друг с другом. Снова имеется два решения, и снова реализация того или другого зависит от начального устройства потока. Струи слипаются под воздействием капиллярных сил, поэтому в жидкости, обладающей малым поверхностным натяжением, например *некапельной*, такой эффект не наблюдается. Опыт легко осуществить, пробив два близко расположенных на одном горизонтальном уровне отверстия в жестяной банке и налив туда воду. Легко слипаются и три струи.

Окружающая среда приводится в движение из-за того, что струя передаёт ей продольный импульс. Такой механизм называется *эжекцией*. Кроме того, струя сообщает окружению завихренность. Такой механизм называется *вовлечением* (Рейнольдс, 1979).

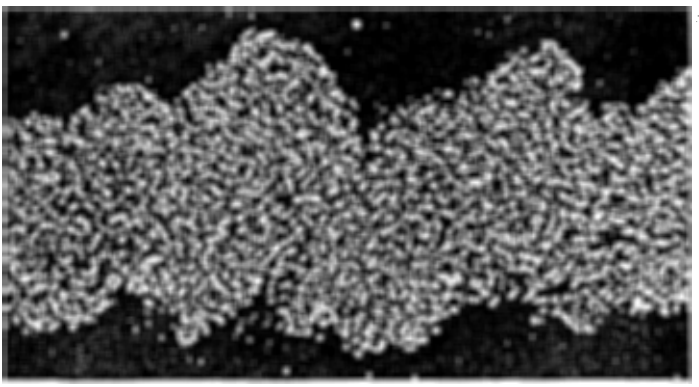


Рис. С.1. След за пулей

На ламинарном участке струи или слоя течение плавно переходит во внешнее. Турбулентные струи и слои ведут себя совсем по-другому. На рис. С.1 показана фотография турбулентного следа за летящей пулей (Корсин, Кистлер, 1955). Видна чёткая поверхность раздела между безвихревым внешним потоком и сильно завихренным потоком в зоне интенсивной турбулентности. Такая граница называется *суперслоем Корсина*. Она фрактальна и нестационарна. Захват внешней жидкости при деформации суперслоя Корсина приводит к значительному усилению процесса вовлечения.

Эффект Коанда

В 1910 году на авиационном салоне под Парижем успешно прошли испытания самолёта необычной конструкции. У него отсутствовал обязательный для того времени пропеллер, вместо которого в носовой части располагался мотокомпрессорный двигатель — прототип современного воздушно-реактивного двигателя! Чтобы отражать пламя, вырывающееся из реактивных сопел, от фанерного фюзеляжа, молодой конструктор этого самолёта румын Г. Коанда установил металлические щитки. После успешного полёта отделавшийся ушибами изобретатель принимал восторженные поздравления, в частности от Эйфеля, выдающегося французского инженера-гидродинамика. Но триумфатор думал о другом — о странном поведении огненной струи во время разбега самолёта. Струя вместо того, чтобы отражаться от специально установленных металли-

ческих щитков, защищающих фанерный фюзеляж от воспламенения, прижималась к ним, разворачиваясь в обратную сторону.

Явление, когда при достаточно малом значении расхода струя резко отклоняется от того направления, по которому истекает при большом значении расхода, теперь называется *эффектом Коанда*. Открытие этого эффекта сначала не привлекло к себе внимания — в течение последующих 25 лет Коанда, уже известный авиаконструктор, самостоятельно проводил опыты, отыскивая своему открытию возможные области применения. Однако сегодня эффект Коанда используется при разработке двигателей для аппаратов на воздушной подушке и суден с подводными крыльями, для повышения тяги реактивных сопел, для торможения самолётов при посадке и для глушения шума реактивных двигателей. С эффектом Коанда мы встречаемся каждый день, досадуя, что струя, вытекающая из носика чайника, при малом расходе вдруг прилипает к его поверхности и льётся мимо чашки. Такой поворот струи и прилипание к твёрдой поверхности гидродинамики в шутку называют ещё «эффектом чайника». Как и в задаче об изгибе струи на ложке, решающим здесь оказывается прижатие струи к кромке подсасывающей силой. Поэтому эффект Коанда наблюдается и в *капельных*, и в *некапельных* жидкостях.

Он используется в дискретном усилителе, пневматическом приборе, работа которого основана на сильной чувствительности струи к несимметричным сигналам. Пневматические приборы — это комбинации миниатюрных пластин с прорезанными в них каналами, по которым движется воздух или вода. Приборы обладают большим коэффициентом усиления сигнала, потому что мощность управляющей струи ничтожна по сравнению с мощностью питающей струи.

Плёнки

Плёнка образуется при растекании струи по твёрдой поверхности. Возьмите большую сковороду, переверните её вверх дном и подставьте под водопроводную струю. Растекающаяся по сковороде плёнка демонстрирует интересное волновое явление, называемое *гидравлическим скачком* или *прыжком*: толщина плёнки почти внезапно увеличивается, образуя на некотором расстоянии от центра фотогеничный водяной тор.

Гидравлический скачок имеет волновую природу. Обычные синусоидальные волны распространяются в мелком водоёме со скоростью $c = (gh)^{1/2}$, где h — глубина воды, g — ускорение свободного падения. Если скорость течения воды $u < c$, то волны могут двигаться против

течения, возмущения распространяются вниз по потоку. Такое движение называется *докритическим*. В *сверхкритическом* движении, когда $u > c$, слабые сигналы против потока не распространяются, течение «очищено» от всех малых возмущений, генерированных где-либо спереди. Гидравлический прыжок наблюдается там, где сверхкритическое течение переходит в докритическое. Перед прыжком скорость распространения волны, пропорциональная корню квадратному из глубины, мала, поток здесь сверхкритический. За скачком толщина слоя воды, а значит, и скорость распространения волны велики, поток здесь докритический.

При переходе через скачок выполняются законы сохранения массы воды и импульса. Однако механическая энергия не сохраняется: потери механической энергии происходят из-за разбрызгивания и нагревания воды на фронте разрыва, где течение турбулентно. Подобные элементарные рассуждения не могут объяснить все свойства такого сложного явления, как гидравлический скачок (Хорнунг, 1995). Не все свойства скачка можно предсказать теоретически. Вот одно из непредсказуемых: скорость за скачком оказывается неоднородной по вертикали и не уменьшается, а увеличивается с глубиной.

Гидравлический прыжок легко получить в канале: стоит лишь внезапно выдернуть заслонку, разделяющую воду с различными уровнями. К этой же цели ведёт разрушение «плотины» в весеннем ручье. Стекающий с крутой наклонной плоскости слой воды образует на горизонтальном участке гидравлический прыжок. При достаточной мощности горячей струи, внедряющейся в наполненную холодной водой ёмкость, скачок возникает на свободной поверхности воды. В природных условиях подвижные гидравлические скачки наблюдаются в реках и называются борами от греческого слова *boreas* — северный ветер (Борей). Хорошо видимые буруны на отмели — это турбулентные боры.

Внутри водяного тора жидкость вращается по замкнутым траекториям; массообмен между вращающимся образованием и остальным потоком очень медленный, в чём легко убедиться, если с помощью пипетки ввести в образованный на сковороде тор каплю чернил. За скачком течение завихрено. Если в зоне течения перед скачком поставить малое возмущение в виде проволочного кольца, концентрического фронту скачка, то он переместится на это место. Докритическое течение за скачком неустойчиво, его внешняя граница имеет неправильную форму, разорванную «пальцами», по которым вода стекает со сковороды в ванну.

Если сковороду слегка наклонить к горизонту, то граница боры из окружности превращается в овал. При большом угле наклона овал размыкается, форма границы уподобляется параболе; одновременно граница

области докритического течения становится упорядоченной. Аналогичные метаморфозы происходят при падении струи в поток мелкой воды.

При стекании воды со сковородки плёнка свёртывается в систему струй: одной, двух и трёх. Весь процесс «обтекания» сковородки описывается синергетической схемой *струя–плёнка–струи–капли*.

Объяснение следующего фокуса, вероятно, связано с образованием гидравлического скачка. Поместите сырое яйцо в стакан и подставьте его под водопроводную струю — при достаточно большом напоре струи яйцо всплывёт, словно притянутое струёй воды.

На этом же принципе основан другой фокус. Если металлический диск поместить в наполненную водой ванну, то он потонет. А если направить сверху на него струю из водопроводного крана? Казалось бы, под напором струи он потонет ещё быстрее. Однако диск не тонет! На него действует волшебная выталкивающая сила (Лузин, 1986). Кромка диска играет роль кольца, фиксирующего положение боры и препятствующего окончательному потоплению диска. А волшебная сила оказывается просто архимедовой. Положение диска очень устойчиво: вернувшись в ванную комнату после длительного отсутствия, вы увидите картину течения не изменившейся.

Обыкновенные пузыри лопаются за сотую долю секунды. Поэтому человеческий глаз, способный различать события более трех сотых секунды, не успевает ничего заметить.

Опыт по разрушению пленки можно провести, если пробить ее искрой. Тогда от точки пробоя будет разрастаться дырка со скоростью примерно десять метров в секунду. На окружности этой дырки образуется водяной валик, напоминающий гидравлический прыжок.

Течение в плёнке с ростом числа Рейнольдса теряет устойчивость. Как показали опыты С. П. Капицы, в стекающей по наклонной плоскости плёнке стационарное ламинарное течение сменяется волновым течением, которое затем переходит в турбулентное (Левич, 1959).

В «чистом» виде турбулентность в пленке можно наблюдать, если проткнуть горизонтальную пленку небольшим стержнем и передвигать его со скоростью несколько сантиметров в секунду. Вихри, образованные за стержнем, являются приближенной моделью двумерной турбулентности.

Общим свойством струй, плёнок и движущихся по твёрдой поверхности капель является *меандрирование*. Известно, что берега рек и ручьёв содержат извилины, обусловленные появлением вторичных течений. Такие извилины русел называются меандрами. Происхождение этого термина связано с древнегреческим названием Меандр — очень из-

вилистой реки в Турции. Пристеночная плёнка содержит «сухие» включения, границы которых меандрируют. Поверхность струи и траектория скользящей по поверхности капли тоже меандрируют. Степень меандрирования характеризуется фрактальной размерностью, зависящей от многих параметров.

Вихри

Гидродинамика — это наука о движении вихрей. Безвихревое течение и тривиально, и неинтересно для практических приложений.

Антипараллельную пару вихрей, то есть пару противоположно вращающихся параллельных колоннообразных вихрей, можно наблюдать как след за тяжёлым самолётом, винтовой вихрь — как след за вращающейся лопастью вертолёта или вращающейся лопаткой турбины.

Опытные курильщики могут создавать дымовые кольца малой интенсивности. Достаточно мощные кольцевые вихри легко получить при импульсном проталкивании дыма через круглое отверстие с острыми кромками. Такой вихрь образован сворачиванием в спираль сошедшего с кромок отрыва, поэтому долго сохраняет спиральную структуру. Фотогенично расширение кольцевого вихря при приближении к плоскости.

О том, что два вихревых кольца периодически проходят одно сквозь другое, написано чуть ли не во всех учебниках по гидродинамике. Названо это явление «чехардой». На самом деле ситуация не так проста (Сэффмен, 1984). Если начальная скорость вихрей в воде примерно одинакова, то чехарды не наблюдается, оба кольца соединяются в единый и неразделяющийся в дальнейшем клубок. Если скорость заднего вихря намного превышает скорость переднего, то образуется неустойчивое составное кольцо, разделяющееся затем на два. В итоге заднее кольцо обгоняет переднее, однако после этого скорость обоих колец оказывается примерно одинаковой, поэтому последующего их соединения не наблюдается.

Два воздушных кольцевых вихря при подходящих условиях сливаются в одно эллиптическое кольцо, которое осциллирует и затем распадается на два отдельно движущихся кольцевых вихря. Каждое новое кольцо «отбирает» завихренность от двух исходных колец примерно в равном отношении. Таким образом, остаётся открытым вопрос о существовании чехарды вихревых колец как в воде, так и в воздухе.

Если выстреливать из отверстия подряд несколькими вихревыми кольцами, то образуется очаровательный «букет» вихрей. Сначала они движутся вдоль общей оси, а затем эффектно расходятся в разные стороны. Опыты с кольцевым вихрем показывают, что его легко разрезать

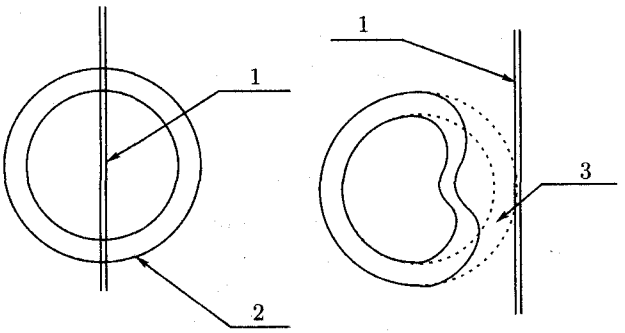


Рис. С.2. Разрезание кольцевого вихря: *а* — продольное; *б* — поперечное (1 — нож, 2 — вихрь, 3 — форма невозмущенного вихря)

поперёк, но невозможно разрезать продольно. На рис. С.2 *а* кольцевой вихрь движется по нормали к рисунку, нож 1 (пластина) расположен на диаметре кольцевого вихря 2 — последний практически не изменяет своей формы. На рис. С.2 *б* нож смещён от центра кольцевого вихря примерно на радиус — вихрь искривляется, избегая встречи с ножом (3 — форма невозмущенного вихря).

Примером объёмного вихря, который имеет одинаковыми по порядку величины все три своих размера, является *вихрь Моффата*, возникающий при обтекании ползущим потоком угловых областей.

Лоток Хеле-Шоу

В 1898 году английский гидродинамик Хеле-Шоу создал оригинальную установку, названную впоследствии его именем. Между двумя параллельными стеклянными пластинами он вставлял «модели» в виде цилиндрических тел с образующими перпендикулярными пластинами, и пропускал бесцветную жидкость (воду, глицерин). Для визуализации течения в нескольких точках входной части лотка он вводил красящее вещество (рис. С.3). Расстояние между пластинами d было гораздо меньше характерного размера модели l.

Результат получился удивительный. Внутри лотка, то есть в масштабе $O(d)$, течение оказалось ползущим, профиль скорости — куэтовским. А течение в целом, то есть в масштабе $O(l)$, оказалось невязким.

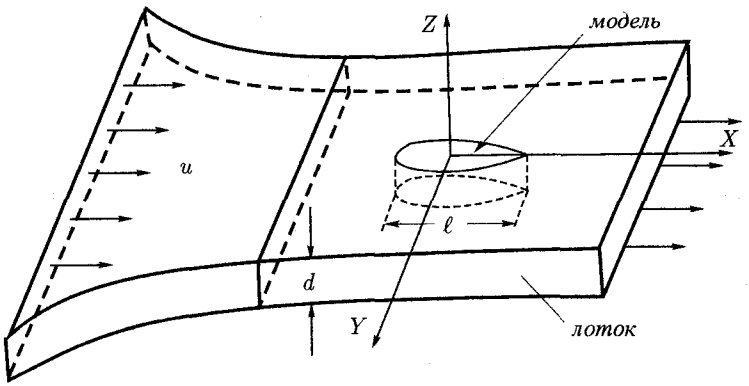


Рис. С.3. Лоток Хеле-Шоу

Плоское течение было безвихревым, не удовлетворяющим условию прилипания. Одним словом — «сверхтекучесть при комнатной температуре»!

В лотке Хеле-Шоу можно провести красивый опыт по проникании невязкой жидкости в вязкую. Для этого в середине верхней пластины лотка, содержащую вязкую жидкость, например глицерин, следует просверлить отверстие, через которое при достаточно большом давлении впрыскивать воду или воздух. Впрыскиваемое вещество примет форму пузыря, от которого в разных направлениях будут отходить разветвляющиеся пальцы, имеющие фрактальную структуру.

Если в лотке Хеле-Шоу совсем убрать верхнюю стенку, то есть сделать его открытым, и несколько наклонить к горизонту, то происходящее под действием силы тяжести течение окажется принципиально отличным от рассмотренного. В таком лотке, в частности, исследуется поведение поверхностных волн в жидкости. К этой теме мы и переходим.

С.5. Волны на воде

Хотя официально основателями теории волн считаются французы О. Коши и С. Д. Пуассон, в этот ряд следует занести и Ньютона. Вот что он сказал в «Началах»: «Когда по жидкости распространяется сотрясение, то отдельные её частицы, совершая взад и вперёд весьма малые колебания, ускоряются и замедляются по закону маятника». Лучше не

скажешь! «Заодно» Ньютон объяснил — уже вполне научно! — происхождение приливов.

Среди многообразных волновых движений, наблюдающихся чуть ли не во всех областях физики (а также в химии, биологии, экономике и т. д.), волны на воде — периодические поднимания и опускания свободной поверхности воды $y = f(x,t)$ относительно невозмущённого уровня $y = 0$ — наиболее фотогеничны и легко воспроизводимы в домашних условиях, ибо не требуют для воспроизводства изощрённой исследовательской техники (Кадомцев, Рыдник, 1981). О многообразии волн хорошо сказал Ф. Тютчев:

Дума за думой, волна за волной —
Два проявленья стихии одной:
В сердце ли тесном, в безбрежном ли море,
Здесь — в заключении, там на просторе.

В природе волны на воде вызываются различными причинами: космическими (приливы, отливы), сейсмическими (цунами), ветром или движущимся кораблём. Такие волны могут переносить энергию на большие расстояния без заметного переноса массы.

«Бросая в воду камешки...»

Траектории плоских волн удобно изображать в плоскости x, t. На рис. С.4 показано распространение волны в область покоящейся (тихой) воды. Такая группа волн может быть образована вертикально колеблющейся тонкой пластиной — волнопродуктором, запущенным из состояния покоя и через некоторое время выключенным. Вдоль сплошных линий длина волны постоянна, они образуют передний 1 и задний 2 фронты цуга волн. Штриховые линии указывают траектории гребней волны, которые движутся с фазовой скоростью. Фронты волны, как узлы биений, движутся с групповой скоростью. Наблюдение — только очень внимательное! — за таким цугом волн чрезвычайно поучительно. При подходе к переднему фронту волны гребень исчезает, а вблизи заднего фронта волны, как бы из расположенной за ним тихой воды, образуются новые гребни. Впечатление такое, что на переднем фронте энергия исчезает, а на заднем — появляется! На самом деле никакого парадокса нет, так как энергия распространяется не с фазовой скоростью, а с групповой.

Опыт с рождением и смертью волновых гребней можно осуществить гораздо проще, если всерьёз воспользоваться советом Козьмы Прудкова о бросании в воду камешков: «Бросая в воду камешки, смотри на круги,

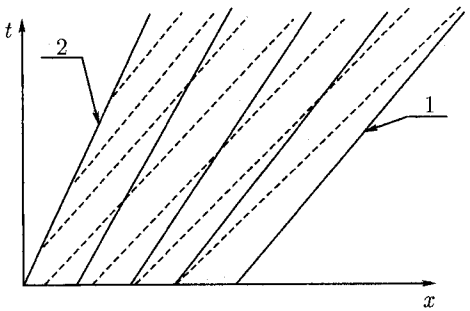


Рис. С.4. Распространение волны в покоящуюся жидкость (1 — передний фронт, 2 — задний фронт, штриховые линии — траектории гребней волн)

ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою». От достаточно тяжёлого камешка энергия распространяется по всем радиальным направлениям. Гребень каждой волны, опережая в своём продвижении поток переносимой энергии, не может не исчезнуть вблизи переднего края расширяющейся концентрической картины волн. В центре такой картины вскоре образуется расширяющаяся круговая зона тихой воды, на внешней границе которой возникают «из ничего» волны сравнительно малой длины, порядка 4–5 см.

Волны Стокса

Волну можно считать синусоидальной, если её амплитуда мала. С ростом амплитуды профиль волны всё более отличается от синусоиды. Такие периодические волны называются *стоксовыми* в честь Стокса, впервые исследовавшего их в 1847 году. Их легко воспроизвести в ванне. Они нелинейны, не подвержены суперпозиции.

Волны Стокса по форме описываются однопараметрическим семейством функций, одним пределом которых является гармоническая волна, а другим — кривая с заострённым гребнем, наклонённым к горизонту под углом 30°. Плоские волны Стокса неустойчивы, в результате их распада образуются регулярные трёхмерные волны.

Внутренние волны

До сих пор рассматривались волны на воде. Теперь обратимся к волнам под водой. Они возникают на границе двух разных фаз жидкости,

например на границе пресной и солёной воды. Корабль, попавший в такой «коктейль», испытывает резкое торможение невидимой силой, парусные яхты теряют мореходность. Это явление называется «мёртвой водой». Корабль затрачивает свою мощность на возбуждение невидимых глазом волн на контактной границе между разноплотностными жидкостями. Такие волны называются внутренними.

Капиллярно-гравитационные волны

При отклонении поверхности воды от ординарного уровня $y = 0$ сразу же начинают действовать силы, стремящиеся вернуть возвышающийся участок в начальное положение. Если таковыми являются силы поверхностного натяжения и силы тяжести, то образующиеся под их влиянием волны называются капиллярно-гравитационными. Дисперсионное соотношение для такой элементарной волны хорошо изучено теоретически и экспериментально. Скорость капиллярно-гравитационной волны имеет минимум $c_{\min}$. Если скорость движения тела по поверхности воды u_∞ меньше $c_{\min}$, то стационарная относительно тела система волн отсутствует, ибо нельзя удовлетворить условию стационарности: $u_\infty = c$. Поэтому медленно движущийся по поверхности озера жук-плавунец не создаёт волн.

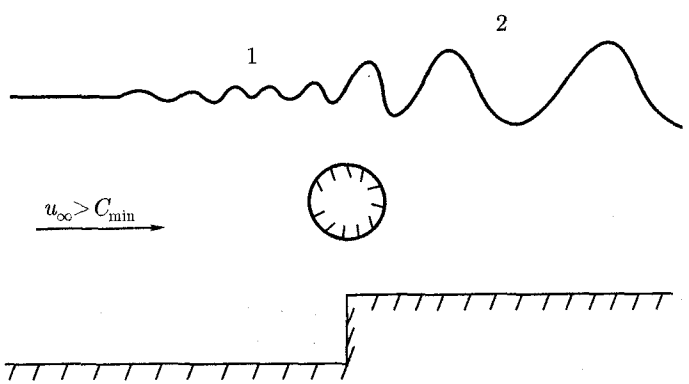


Рис. С.5. Короткие (1) и длинные (2) волны

При $u_\infty > c_{\min}$ имеется два решения, одно из которых (короткие волны) имеет групповую скорость, большую u_∞, другое (длинные волны) — меньшую u_∞. Поэтому короткие волны располагаются перед пре-

пятствием в однородном потоке, длинные — за ним. Препятствие может иметь форму погруженного в воду тела или ступеньки на дне водоема. На рис. С.5 показаны оба таких способа возмущения потока сразу. Короткие волны 1 затухают быстро, поэтому они далеко вперед от препятствия не отходят. Длинные волны 2 затухают достаточно медленно, поэтому могут быть обнаружены на значительном расстоянии от препятствия.

Такова картина плоских стационарных волн за препятствием. Система пространственных волн имеет ту же природу. Волны, генерируемые неподвижным поплавком в потоке воды, знакомы каждому рыбаку. Это — *капиллярные* волны, расположенные выше по течению от поплавка и называемые ещё *рябью*. Капиллярные волны возникают и при обтекании тел больших размеров, но обычно они малы и посему неприметны.

Корабельные волны

Гравитационные волны, образующиеся за кораблём, так и называются — корабельными. В этом случае рябью можно пренебречь. Как показал ещё У. Кельвин, на глубокой воде, когда групповая скорость в два раза меньше фазовой, волны за движущимся с постоянной скоростью кораблем сосредоточиваются в клиновидной области (клин Кельвина) с углом полураствора примерно 20°. Этот угол не зависит ни от скорости, ни от формы движущегося над водой объекта. В отличие от самолёта любое надводное судно движется так, как будто его «эффективное число Маха» равно $M = 1/\sin 20° \approx 3$. Волны Кельвина — это универсальная сетка черенковских излучаемых волн. Их картина представлена на рис. С.6.

На мелкой воде картина волн радикально меняется. Дисперсия исчезает, фазовая скорость выравнивается с групповой. Как и для ударной волны в газе, число Маха зависит от скорости потока u_∞: $M = u_\infty/c$, где $c^2 = gh$, g — ускорение свободного падения, h — глубина водоема. Для экспериментального моделирования корабельных волн весьма пригодна волновая кювета (Лайтхилл, 1981).

Трансволновой переход от движения с докритической скоростью $u_\infty < c$ к движению со сверхкритической скоростью $u_\infty > c$ своеобразен. Когда $u_\infty > c = 0.8 \div 0.9$, возникает поперечно расположенная волна, у которой есть только горб, но нет впадины. Скорость распространения этой волны равна скорости движения судна u_∞, поэтому её называют *спутной*. Если судно резко замедлит свой ход, волна оторвётся

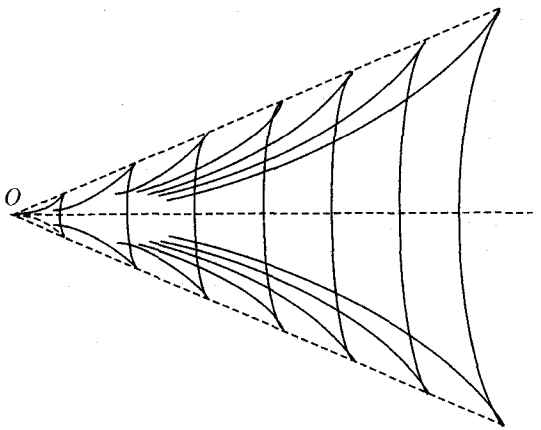


Рис. С.6. Гребни волн в клине Кельвина

от его носовой части и побежит вперёд со скоростью u_∞. Если, наоборот, судно ускорится до сверхкритической скорости, то спутная волна трансформируется в описанную выше клиновидную.

При движении со сверхкритической скоростью корабль затрачивает меньшую мощность, чем при движении с докритической скоростью. Поэтому капитан корабля при переходе через критическую скорость c сначала увеличивает мощность машин, а затем уменьшает. Такое же положение возникает при движении широкой баржи по каналу, который она почти перекрывает. Когда скорость баржи превышает критическую, её волновое сопротивление внезапно снижается. Здесь уместно процитировать С. Рассела[1]. Вот что он написал в 1844 году, спустя 10 лет после того, как открыл уединённую волну: «Насколько мне известно, это явление было случайно открыто на канале малых размеров Глазго – Ардроссан. Горячая лошадь, впряженная в лодку Уильяма Хаустона, эс-

[1]Знаменитый шотландский учёный и инженер Скотт Рассел (1808–1882) родился в семье священника, но выбрал путь исследователя. Талантливый и дерзкий, он не боялся самой чёрной работы и был готов на любые эксперименты. В 16 лет он получил степень бакалавра наук. Однако ему не была уготована спокойная университетская карьера, и он оказался вовлечённым в мир бизнеса и кораблестроения.

Открытие для его автора обычно становится наваждением. Не избежал этой участи и Рассел. В его посмертно опубликованном труде «Волна переноса» теория солитона применяется не только для вычисления толщины атмосферы (это ещё ничего!), но и для вычисления размера Вселенной (а это уже слишком!).

квайра, одного из владельцев предприятия, испугалась и понесла, волоча лодку за собой, и, к своему удивлению, мистер Хаустон увидел, что пенящаяся кормовая волна, которая обычно опустошала берега, исчезла, и судно шло по воде сравнительно плавно с очень сильно уменьшенным сопротивлением. Мистер Хаустон обладал практичностью и осознал коммерческое значение этого факта для компании канала, с которой он был связан». Он посвятил себя внедрению в практику судов, движущихся с такими высокими скоростями, как 9 миль в час, что повлекло за собой «большое увеличение доходов владельцев канала».

Образование спутной волны порой называют «эффектом лошади эсквайра Хаустона».

Солитон

Однако главное открытие в жизни Рассела — волна необычного типа, которую сегодня называют уединённой или просто солитоном. Красочное описание этого открытия самим Расселом до сих пор цитируется во всех учебниках по солитонам. Кстати говоря, спутная волна — это тоже солитон.

Обладая обострённым чувством нового, Рассел почувствовал, что обнаружил принципиально неизвестное явление. Ему удалось воспроизвести уединённую волну в лабораторных условиях.

С солитонами мы встречаемся на каждом шагу. Их можно увидеть в весеннем ручье в форме сетки уединённых волн, пересекающих ручей по всей ширине (Кадомцев, 1988).

Другие волны

Кроме рассмотренных выше волн, легко моделируемых в ванной, имеются такие виды наблюдаемых в природных условиях крупномасштабных волн, которые трудно или совсем невозможно моделировать дома. При движении воды под уклон иногда возникают *катящиеся волны* — периодические разрывные боры. Наиболее характерные наблюдения относятся к каменному водоводу в Альпах, где уклон округлённо равен 1/14. Катящиеся волны образуются не только на воде, но и на песке.

Волновые процессы происходят и в ледниках. Они с трудом поддаются исследованию из-за недоступности и малой скорости движения. Характерные скорости имеют порядок от 10 до 100 метров в год.

Важную роль в океане и в атмосфере играют *инерционные волны*, инициированные вращением Земли. Они образуются, когда действие силы тяжести мало по сравнению с кориолисовой силой.

Волны на воде, генерируемые ветром, называются *ветровыми*. Они изучаются в специальных установках — штормовых бассейнах, которые, подобно кольцевым ускорителям частиц, имеют кольцевую форму. Механизм передачи энергии от ветра волне вихревой: на линии контакта вода–воздух образуются вихри воздуха. Штормовые волны достигают тридцатиметровой высоты. С увеличением скорости ветра и амплитуды волны на подветренной стороне ещё пологого гребня возникает присоединённый вихрь. С нарастанием волны движение приобретает хаотический характер, сложение элементарных волн разных высот, фаз и направлений происходит по законам случая.

Ветровые волны неустойчивы. При определённых условиях, особенно при движении волны против ветра, регулярные образования не могут существовать — они превращаются в брызги и пену.

Чтобы развить волну высотой в 12 метров, восьмибалльному (по шкале Бофорта) ветру требуется несколько суток. Столь же долго морские волны успокаиваются.

С.6. Взаимодействие волн на воде

Взаимодействие волн универсально, будь то волны на воде или электромагнитные волны, и проявляется в виде интерференции, рефракции и дифракции.

Интерференция

Интерференция — это взаимодействие волн друг с другом или с потоком. Рассмотрим стоячую волну. В силу симметрии движение жидкости в пучностях вертикальное. Поэтому картина течения между двумя выбранными пучностями не изменится, если в местах их расположения поместить вертикальные стенки, то есть заключить стоячую волну в прямоугольный сосуд.

Стоячая волна получится, если лоток с водой слегка наклонить и вернуть в прежнее положение. При проявлении фотопленки необходимо менять частоту покачивания ванночки с проявителем. В противном случае части пластинки, расположенные под узлами, недопроявятся из-за того, что здесь частицы раствора почти не движутся, нарушая тем самым условие эффективного химического действия проявителя. Колебание струны, производимое клавишей, смычком или пальцем, — это тоже стоячая волна. Точнее говоря, — система стоячих волн.

Так как стоячая волна представляет собой сумму двух бегущих в разные стороны волн, то справедливо правило: бегущая к твёрдой стенке волна отражается от неё волной, бегущей в противоположную сторону. Такова суть простейшего случая интерференции двух плоских волн.

В пруду или даже в ванне можно создавать два геометрически различных типа волн. *Плоские* волны, примером которых является стоячая волна, возбуждаются горизонтальными колебаниями планки или линейки. *Круговые* волны расходятся от брошенного в воду камня, создаются периодическим опусканием туда твёрдого шарика или просто с помощью касания поверхности воды пальцем. Таким образом можно легко повторить школьный опыт по интерференции двух круговых волн.

Если, периодически касаясь пальцем водной поверхности, перемещать его в одном направлении, то можно наблюдать эффект Доплера: зависимость длины волны от скорости движения источника волн (пальца). Следующие друг за другом гребни волн будут сгущаться в направлении движения источника и разрежаться в противоположном направлении. Следовательно, длина волны в направлении движения уменьшится, а в противоположном направлении увеличится.

Преломление

Преломление (или рефракция) волны происходит, когда она переходит из одной среды в другую или из мелководной части в глубоководную. В мелкой воде скорость волны меньше, чем в глубокой. Отражённые волны обычно незаметны из-за их слабости.

Поскольку ситуация схожа с преломлением светового луча, водяные волны, как и световые, могут полностью отражаться от границы раздела сред, не образуя преломлённую волну. Такие опыты требуют к себе скрупулёзного отношения.

Дифракция

Отражение волны от твёрдой поверхности легко наблюдать, если на пути круговых волн поставить плоскую преграду (кусок дерева или металла). Пока интенсивность волны мала, закон равенства угла падения углу отражения находится в удовлетворительном согласии с опытом — явление аналогично отражению световых волн. Отличие волн на воде от световых проявляется, когда интенсивность волны велика. Наглядный пример — накат морской волны на крутой берег. Здесь нам уготована лишь роль наблюдателя, ибо природа сама позаботилась о реализации

такого фотогеничного эксперимента. Устремившаяся к берегу волна сначала усиливается из-за уменьшения глубины, разрушается и затем накатывается на откос, сохраняя ещё свою разрушительную силу. Различные типы разрушения волны (барашки, скользящие и ныряющие буруны) запечатлены на полотнах великих художников.

Если по дну ванны протаскивать на нитке какое-либо тело, то на поверхности воды образуются стационарные волны. На их образование уходит часть той энергии, которая затрачивается на буксировку тела. Поэтому тело испытывает *волновое* сопротивление своему продвижению.

Дифракция приводит к появлению волн там, где они, казалось бы, не должны быть, — в теневой области за телом. Убедительны в этом смысле опыты по прохождению волн через щель. На большом расстоянии от щели наблюдаемое явление называется *дифракцией Фраунгофера*. Если исходный фронт волны не является плоским, то наблюдаемое вблизи щели явление называется *дифракцией Френеля*.

С.7. Звуковые волны

При взаимодействии волн непременно присутствуют эффекты их усиления или ослабления. Так, морская раковина усиливает всегда имеющийся, но не регистрируемый ухом человека внешний звуковой фон. Одно из удивительных явлений, связанных с распространением звука в закрытых помещениях, — это «шепчущие галереи», доступный пример которых представляют собой купола христианских храмов. В них тихий шёпот слышен с необычной громкостью. Из акустики общественных зданий известно, что звук поглощают ковры, драпировки, присутствующие в зале люди. В отсутствие поглощающих материалов обнаруживается значительное продление звука. Наиболее поразительным примером этого факта является зал Баптистерии в Гизе, где пропетые последовательно ноты простой гаммы можно слышать звучащими вместе в течение 12 секунд.

Русский хирург Н. С. Коротков (1874–1920), участник русско-японской войны, предложил новый способ измерения кровяного давления, который, благодаря своей простоте, сразу же получил широкое применение. В наше время каждый человек знает об этом способе. Резиновая манжета одевается на руку и накачивается воздухом до тех пор, пока не пережмёт артерию. Затем давление снижается. Когда оно упадёт до давления крови, артерия, наполняясь кровью, быстро разжимается. Этот

процесс сопровождается усилением звуковых волн и появлением характерного щелчка, который и называется звуком Короткова. Врач слышит его с помощью фонендоскопа, фиксируя в этот момент давление в манжете.

Любой охотник знает, что нельзя подходить к добыче с подветренной стороны. Почему? Потому что лучи — линии распространения звуковой волны — при её движении против ветра изгибаются вверх и могут пройти выше жертвы, а при распространении по ветру звуковые лучи прогибаются вниз. Такое поведение лучей объясняется тем, что в приземном слое атмосферы скорость ветра возрастает с высотой.

С.8. Колебания тел в жидкости и в газе

Вынужденные колебания[1] твёрдых тел в сплошной среде приводят к организации априорно непредсказуемых вихревых структур. Выберем в качестве колеблющегося тела китайцев. Если они все сразу прыгнут с двухметровой высоты и затем будут повторять прыжок примерно через каждые 50 минут, то по земному шару начнёт распространяться и усиливаться *сейсмическая* волна силой до 4.5 балла по шкале Рихтера. Правда такое «геофизическое оружие» прежде всего поразит Китай (Уолкер, 1989).

На колебания в капельной жидкости влияет сила тяжести, поэтому колебания в этом случае будем разделять на вертикальные и горизонтальные, считая силу тяжести направленной вертикально.

Вертикальные колебания

При вибрациях в песке шарик от настольного тенниса поднимается вверх. Тяжёлые тела в жидкости в условиях вибрации всплывают, лёгкие — тонут. Такие опыты лучше всего проводить на вибрационном стенде — колеблющейся с заданной частотой и амплитудой платформой. Если колебать стеклянный цилиндрический сосуд с водой и помещённым

[1]Теория колебаний имеет длинную и сложную историю, восходящую к Бернулли и Эйлеру. Лагранж дал общую теорию линейных колебаний системы с конечным числом степеней свободы, введя обобщённые координаты. Одним из основоположников акустики, наряду с Пифагором, считается доктор права и философии, немецкий учёный Эрнст Хладни (1756–1827). Томас Юнг около 1800 года дал наглядное объяснение учению о волнах. Фурье (1768–1830) открыл ряды, названные впоследствии его именем, создав тем самым базу для теоретической акустики. Лорд Рэлей в 1877 году значительно продвинул эту теорию, подытожив полуторавековой этап её развития в неувядаемой «Теории звука». Сегодня этот фолиант (Рэлей, 1955) читается с трудом.

в него тяжёлым шариком, то при достаточной интенсивности колебаний под шариком образуется каверна, он всплывает.

Волны на свободной поверхности в вертикально колеблющемся сосуде впервые наблюдал Фарадей. Удивительно, что их частота оказалась в два раза меньше, чем частота колебаний сосуда. При определённых условиях волны Фарадея неустойчивы (Керда, Тирапегу, 1988).

Колебания достаточно высокой частоты гасят неустойчивость Кельвина – Гельмгольца. Наконец, можно проследить за проникание в область безвихревого течения турбулентности, которая возбуждается, к примеру, колеблющейся на поверхности жидкости решёткой. Турбулентность гасит внутренние волны.

Горизонтальные колебания

Погрузив вертикально в наполненную водой ванну пластину на небольшую (примерно 4 мм) глубину и заставив её колебаться в горизонтальной плоскости, можно увидеть необыкновенные волны, называемые *краевыми*. Их первооткрывателем тоже был великий Фарадей. Ему и предоставим слово: «Немедленно стали образовываться волны, возвышения и складки на воде, имеющие весьма странный характер. Волны, распространяющиеся от пластинки к стенкам сосуда, были едва заметны; но у самой пластинки непрерывно возникали направленные перпендикулярно ей бугорки высотой от трети до половины дюйма и более, напоминающие зубья очень короткой расчёски».

Краевые волны появляются также в наполненном водой бокале, если осторожно провести по его кромке мокрым пальцем, возбуждая колебания стенок бокала.

Замечательные фигуры

Самыми замечательными в физике кривыми являются фигуры Лиссажу, Хладни и Кундта.

Для жидкой частицы колебания в двух перпендикулярных направлениях складываются линейно, по закону сложения векторов. Для гармонических колебаний таким образом получаются плоские[1] кривые, полученные в 1857 году французским физиком Ж. Лиссажу (1822–1880). Они дают хотя и наглядное, но абстрактное представление о геометрии колебаний.

Более сложное взаимодействие стоячих волн наблюдал Хладни в 1787 году. Он возбуждал стоячие звуковые колебания в стеклянной

[1]Нетрудно получить и пространственные кривые.

или металлической пластине, проводя по её кромке смычком. Насыпанный на пластину тонким слоем мелкий сухой песок как бы ссыпался в узловые линии — линии на пластине, которые покоятся при её колебаниях. На них взаимно гасятся волны, возбуждаемые смычком, и волны, отражённые от кромок пластины. Хладниевые фигуры демонстрируют топологию узловых линий при колебаниях тонких пластин, их вид зависит от формы пластины и от того, как она закреплена; узловые линии проходят через точки закрепления пластины. Если смешать песок с пылью, то они всё равно разделятся, образовав независимые узоры. В 1809 году Хладни продемонстрировал свои опыты членам Французской академии. Все академики, включая Лапласа, смотрели на них с явным изумлением — до рождения топологии оставалось почти 100 лет.

Аналогичным образом объясняется природа пылевых фигур Кундта, названных так в честь немецкого физика-экспериментатора А. Кундта (1839–1894), который открыл их в 1868 году. Фигуры Кундта иллюстрируют синергетический принцип о самоорганизации под действием чисто колебательного движения стационарных структур, которые в гидродинамике называются *вторичными течениями* и образуются благодаря действию сил трения в пограничном слое.

В стеклянной цилиндрической трубке, содержащей воздух с примесями мелкого песка или семян ликоподия, Кундт возбуждал стоячую звуковую волну (Уолкер, 1989; Рэлей, 1995). Примесь располагалась в виде повторяющихся сгущений. Когда колебания прекращались, пыль опускалась на дно и накапливалась в узлах. Длина волны укладывалась в расстояние между узлами. Таким образом Кундт измерял длину звуковых волн.

Свистки

Свисток — это аэродинамический генератор звука. В отличие от сирены, действие которой основано на периодическом прерывании потока газа или жидкости твёрдой поверхностью, в свистке звук возбуждается за счёт колебательного движения частиц газа, не связанного с вынужденными колебаниями границ. Подвижные части в свистке отсутствуют. Опыты со свистками занимательны и поучительны.

История экспериментального и теоретического изучения свистков насчитывает сотни лет. Наиболее известны аэродинамические генераторы в музыке. Все духовые инструменты представляют собой различные варианты свистков, опыт создания которых уходит в глубокую древность. Первое описание «эоловой арфы» — самопроизвольного звучания

струн под действием ветра — относится к XVII веку (Андронов, Фабрикант, 1979).

Принцип работы свистка основан на взаимодействии струи с препятствием. Часть кинетической энергии либо преобразуется в колебательную энергию препятствия, либо сразу переходит в вихревую энергию. Колебания препятствия генерируют звуковые волны. Для генерирования интенсивных колебаний необходимо, чтобы собственная частота колебаний препятствия совпадала с частотой автоколебаний струи. Препятствия имеют различную форму и различные виды колебаний. «Краевой тон» получается, если препятствием является клин; «кольцевой тон» — если препятствием является кольцо; «тон отверстия» — если препятствием является пластина с центральным отверстием.

Часто используется резонирующая полость, выделяющая и усиливающая из набора частот, присутствующих в звуке, резонансную частоту. В свистке, предложенном английским учёным Ф. Гальтоном в 1883 году, кольцевая струя набегает на острые клиновидные кромки соосно расположенного полого цилиндрического резонатора. В свистке, предложенном датским физиком Ю. Гартманом в 1922 году, используется сверхзвуковая струя — звук излучает дозвуковой поток за колеблющимся отсоединённым скачком уплотнения, образованным перед резонатором. Вихревой свисток представляет собой цилиндрическую камеру, в которую вдувается воздух из касательно расположенной трубки. В камере создаётся закрученный вихревой поток, и, когда он выходит через центральное отверстие, раздаётся свист.

С.9. Ячеистые структуры

С ростом ответственного за сложность системы параметра течение может стать слоистым или ячеистым, хотя такая структура по большей части остаётся невидимой. Слоистость имеет место в тонких зонах: в пограничном слое, в слое смешения, в струе. Ячеистая самоорганизация часто встречается в природе, примерами являются вихри в верхнем слое океана или озера. В атмосфере слоистость становится видимой благодаря формированию периодических облаков.

Ячейки Бенара

Движение жидкости происходит не только под действием сил или перепада давления, но и из-за температурных неоднородностей. Такое движение называется конвекцией. Циркуляция атмосферы и океана,

дрейф континентов, перенос тепла и вещества на Солнце — всё это примеры конвективных движений.

С помощью простого опыта французский физик Генри Бенар наблюдал в 1900 году удивительные свойства конвективных движений. Представим себе достаточно тонкий слой жидкости между двумя жёсткими теплопроводящими пластинами. Обозначим через T_1 и T_2 температуры верхней и нижней плоскостей соответственно. В состоянии равновесия $\Delta T = T_2 - T_1 = 0$. Если коснуться на некоторое время пальцем одной из плоскостей, то температура в месте касания моментально изменится, например от комнатной температуры 20° С до температуры человеческого тела 36.6° С. Такое временное возмущение состояния системы никакого влияния на равновесное состояние не окажет, поскольку довольно скоро температура снова станет однородной и равной 20° С. Бесследное исчезновение возмущений свидетельствует о том, что система является устойчивой.

Теперь слегка нагреем нижнюю пластину, придав величине ΔT малое положительное значение. В системе начнётся процесс теплопроводности, сопровождаемый практически линейным изменением температуры от значения T_2 на дне слоя к значению T_1 на его верхней границе. С увеличением ΔT достигается состояние, когда внезапно, словно под действием спускового крючка, включается конвекция — жидкость приходит в движение. И это движение не случайное: появляются детерминированные структуры в виде стационарных вихрей, заполняющих прямоугольные ячейки, называемые ячейками Бенара.

Направление вращения в двух соседних ячейках Бенара противоположно. Как бы мы ни изощрялись в проведении опыта, возможны только две ситуации: либо в чётных ячейках движение левовращательное, либо правовращательное. Несмотря на то, что течение Бенара строго детерминировано, направление вращения заранее предсказать нельзя. Оно каким-то неизвестным образом зависит от условий старта. Таким образом, диалектическое единство случайного и закономерного проявляется в гидродинамике. Выбрав один из двух вариантов, система сохранила «релейную память» о тех давних событиях, которые произошли в начальный момент её организации.

Дальнейшее увеличение подогрева нижней поверхности приведёт к тому, что величина ΔT превысит своё второе пороговое значение и детерминированная структура начнёт «расшатываться»: сначала вращение частиц станет пространственным и нестационарным, а затем наступит хаотический режим. Таков сценарий синергетической эволюции: бесструктурность — структура — нестационарность — хаос.

Ячейки Бенара бывают не только квадратными, но и гексагональными (от греческих слов hex — шесть и gonia — угол). Для того чтобы увидеть гексагональный рисунок, достаточно иметь сковороду и немного подсолнечного масла. Если налить в сковороду масло и поставить её на огонь, то, пока разность между температурой на дне сковороды и температурой на поверхности масла ΔT мала, конвекции не будет. Когда ΔT превзойдёт первое критическое значение, то весь слой масла разобьётся на правильные шестигранные ячейки, в центре каждой из которых жидкость движется вверх, а по краям — вниз. Такое направление вращения частиц наблюдается в капельной жидкости, когда коэффициент вязкости убывает с ростом температуры, то есть при приближении ко дну сковороды. В газе, когда влияние вязкости возрастает с ростом температуры, направление вращения частиц в ячейке Бенара изменяется на обратное.

Гексагональная форма ячеек Бенара, напоминающая пчелиные соты, вызвана действием на свободной поверхности масла сил поверхностного натяжения. Такие структуры часто встречаются в гидродинамике. Ячейки Бенара, наблюдаемые на поверхности Солнца, близки к гексагональным. Такие же по форме ячейки Бенара наблюдаемы в чашке кофе со сливками, а также в местах высыхающих озёр.

Специальный вид ячеистой конвекции наблюдается на верхней границе слоя жидкости, покрытого льдом. Такие ячейки не гексагональные, а полусферические, образованные нестационарной циркуляцией воды, «съедающей» постепенно ледяное покрытие.

Течение Колмогорова

В неконвективном течении ячеистую структуру можно получить принудительно. Для этого достаточно приложить к частицам жидкости силу, направленную по скорости основного течения и периодическую по перпендикулярной координате. Такое течение называется течением Колмогорова, оно наблюдается, когда сила больше некоторой критической величины. Колмогоров предложил теорию такого потока, а экспериментальную реализацию осуществили другие (Фриш, 1998).

Конвективный факел

Если поднести к установленному под окном комнаты радиатору свободно установленный на оси пропеллер, то он начнёт вращаться. Такой опыт лишний раз подтверждает наличие конвективных токов, то есть движение нагретого газа вверх, а холодного — вниз.

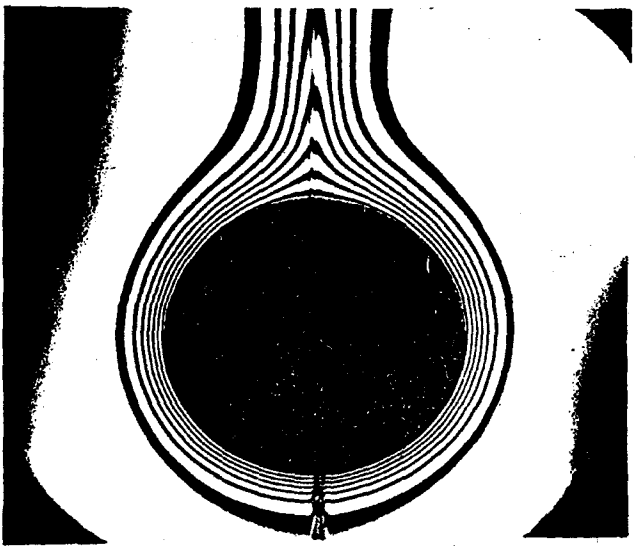


Рис. С.7. Изотермы свободной конвекции от нагретого цилиндра

На рис. С.7 показаны изотермы при свободной конвекции от горизонтального цилиндра диаметром 6 см, равномерно нагретого до температуры, превышающей температуру окружающего воздуха на 9° С. Видно, что примыкающий к поверхности цилиндра тепловой пограничный слой сливается в так называемый факел. Такое течение скорее слоистое, чем ячеистое (Ван-Дайк, 1986).

С.10. Капиллярная жидкость

Капиллярные явления наблюдаются повсюду, без них невозможна сама жизнь. Вот лишь некоторые примеры: поднятие воды по мельчайшим каналам в куске сахара, поднятие керосина по фитилю в керосиновой лампе, всасывание влаги из почвы корнями растений, скольжение насекомых-водомеров по воде в прудах, кровоснабжение венул, удаление из организма инородных частиц и болезнетворных бактерий. Вода не вытекает из опрокинутого вниз стакана, если он накрыт марлей с мелкими ячейками. Если смазанную жиром иголку аккуратно положить на

поверхность воды, то она останется на поверхности, образовав лишь небольшое углубление. Иголка слишком легка, чтобы прорвать границу «вода–воздух», удерживаясь на ней силами поверхностного натяжения. На их действии основано выдувание мыльных пузырей с помощью конической бумажной трубки — этим все мы занимались в детстве. Пузыри-рекордсмены достигают размеров баскетбольного мяча, имея время жизни порядка 30 секунд.

Число Вебера $W = \rho u_\infty^2 l/\alpha$, где l и u_∞ — характерные размер обтекаемого тела и скорость потока, α — коэффициент поверхностного натяжения, характеризует отношение инерциальных сил к силам поверхностного натяжения. Если $W = O(1)$, то жидкость называется капиллярной. Хотя линейные размеры области, где существенны силы поверхностного натяжения на границе между водой и воздухом, обычно малы, их действие может сильно повлиять на картину течения в целом.

Поверхностное натяжение создаёт силу тяги

«Так не бывает, — сразу же подумает читатель, увидев этот подзаголовок, и отбросит чтение в сторону, — если сила тяги приведёт в движение тело, то появится невесть откуда взявшаяся энергия, да к тому же ещё кинетическая». Совершенно верно — в равновесном состоянии действующее на погруженное в жидкость тело поверхностное натяжение распределится таким образом, чтобы суммарная сила оказалась равной нулю. А в неравновесном состоянии? В неравновесном состоянии обычные представления рушатся и создаются условия для парадоксов.

Прикрепите к корме бумажной лодки кусок камфары и опустите её в ванну. Лодка начнёт двигаться. Кристаллическая камфара — великолепный двигатель.

Для объяснения этого парадокса следует заметить, что величина поверхностного натяжения сильно зависит от наличия в жидкой среде примесей. А их в реальных условиях предостаточно. Очень малые количества масла, жира и других загрязняющих веществ, которые неизбежно присутствуют в воде при нормальных условиях, расплываясь по её поверхности тончайшим слоем, заметно уменьшают поверхностное натяжение. Так, если сразу в вытекающей из крана воде коэффициент поверхностного натяжения близок к значению в чистой воде, то затем быстро уменьшается вплоть до половины — sic! — этого значения.

Погруженная в воду камфара становится адсорбентом, то есть телом, поглощающим инородное вещество из воды и концентрирующим его на поверхности. Адсорбция сопровождается выделением тепла, поэтому,

с энергетической точки зрения, опыт непротиворечив, так как кинетическая энергия бумажного кораблика составляет часть выделенной при адсорбции теплоты. Что же касается силы тяги, то она появляется как отличная от нуля суммарная составляющая сил поверхностного натяжения, действующих на кусок камфары.

Эту же тему иллюстрирует ещё один не менее удивительный опыт, который объясняется из чисто «геометрических» соображений: одинаковые по составу крупинки, плавающие по поверхности воды, сближаются друг с другом независимо от того, смачиваемые они или несмачиваемые. Сближается и смачиваемая частица с несмачиваемой.

Эффект Марангони

Добавьте в середину налитого в блюдце тонкого слоя воды небольшое количество камфары, моноэтаноламина или другого поверхностно-активного вещества, легко адсорбирующегося на поверхности воды. Дальнейшее не нуждается в комментариях, ибо описано в Ветхом Завете (14; 21): «И сделал Господь море сушею; и расступились воды». Именно так: вода стремительно убежит к краям блюдца, осушив его центр. Этот эффект обнаружил в середине XIX века итальянский учёный Марангони, и с тех пор он назван его именем. Причина проста: поверхностно-активное вещество, попав в воду, растекается и вовлекает её в движение. Если коэффициент поверхностного натяжения уменьшается с увеличением концентрации инородного вещества, как, например, у камфары, то возникает касательное напряжение, стремящееся «растянуть» площадь области с повышенной плотностью активной примеси, течение жидкости направлено от этой области на периферию. В противном случае течение направлено от периферии к центру.

С усилением адсорбции обычно сменяются четыре типа течений Марангони: затухающее, стационарное, периодическое по времени и турбулентное. Вихри Марангони появляются на границе двух жидкостей, когда одна из них диффундирует в другую, изменяя в месте проникания коэффициент поверхностного натяжения. Красивые по форме и удивительные по содержанию, они долгое время оставались забавой для любителей коктейлей. В настоящее время эффект Марангони учитывается при выращивании кристаллов и при проектировании процессов массообмена в химических реакторах.

Рассыпьте по поверхности воды перчинки и окуните в воду обмылок. Перчинки побегут в сторону от мыла. Странное поведение частиц объясняется тем, что поверхностное натяжение мыльной воды меньше, чем

чистой. Подходя к перчинке, мыльные капли ослабляют действующую на неё силу натяжения. Поэтому на перчинку действует сила, движущая её в сторону чистой воды.

Насекомое, известное под научным названием *stenus*, использует этот эффект для передвижения. Оно выделяет активное вещество, ослабляющее поверхностное натяжение, поэтому движется в сторону чистой воды. Утка, плавающая в воде, остаётся сухой, так как вода не смачивает её покрытые жиром перья. Но если она сядет на мыльную воду, то насквозь промокнет, утяжелеет и даже может утонуть.

Ещё раз о струях

Изолированная струя имеет переменную по длине структуру: происходят процессы диффузии, образования волн, турбулизации и капледробления. Поэтому говорят о «возрасте» струи, о её «старении», мысленно заменяя продольную координату на время.

Многообразно проявление капиллярности в тонких струях капельной жидкости. Недаром М. Волошин сказал:

Нет вещества —
Есть круговерти силы;
Нет твёрдости —
Есть натяженье струй...

Слегка сжав выходное отверстие в шланге, из которого вытекает вода, превратите его из круглого в эллиптическое. Поперечное сечение такой струи по мере взросления теряет свою эллиптичность, пока на некотором расстоянии от шланга не примет, наконец, круглую форму. Далее поперечное сечение струи вновь становится эллиптическим, но большая ось эллипса окажется повёрнутой на 90° относительно изначального направления.

Разгадка природы такой периодичности заключается опять же в действии сил поверхностного натяжения. Сжатие больше там, где больше кривизна струи, — в этом и заключается причина периодического изменения её формы.

Рано или поздно периодичность исчезает. Когда ускорение под действием силы тяжести велико, струя разрушается, распадаясь на капли. Когда же влияние силы тяжести мало, отношение большой оси эллиптического сечения струи к малой возрастает до тех пор, пока струя не превращается в нечто, похожее на плоскую пелену, тоже распадающуюся, в конце концов, на капли.

Если отверстию в шланге придать форму равностороннего треугольника, то можно заметить расслоение струи на три симметричных пелены и дальнейшее объединение их в компактную форму, напоминающую начальную, то есть треугольную.

С.11. Необычные свойства обычных жидкостей

Эксперименты с неньютоновыми жидкостями демонстрируют сложные движения, порой — очевидные, но необъяснимые, порой — невероятные, но поучительные. Вещества, свойства которых изменяются в результате слабых воздействий от свойств жидкости до свойств твердого тела, называют *мягкими*. Без их использования невозможны современные технологии (Де Жен Бадос, 2000). Мягкие среды — это пятое состояние вещества наряду с жидкостями, газами, плазмой и твердыми телами.

Наблюдение пророчицы Деборы

Ньютоновы жидкости и газы состоят из «лёгких» молекул с относительными молекулярными массами не более 1000. К ним причисляют воздух и воду при нормальных условиях. «Тяжёлые» неньютоновы жидкости состоят из огромных молекул, каждая из которых представляет собой цепь из большого числа повторяющихся звеньев. Примерами служат полимерные жидкости, молекулярная масса которых 10^5–10^8: растворы синтетических и биологических полимеров и неразбавленные полимеры, называемые «расплавами». Сюда относятся полиэтилен, полистирол, натуральный каучук. В качестве неньютоновой жидкости можно использовать подсолнечное масло.

Неньютоновы жидкости обладают рядом особенностей. Они, например, имеют память. Дело в том, что время, характерное для процесса перестройки длинных молекул, может превышать время наблюдения за течением жидкости. Течение не успевает перестроиться, имеет место эффект запаздывания, а значит, памяти.

Как утверждает Библия, пророчица Дебора изрекла, что перед Богом текут даже горы. Она первая подметила аналогию между поведением жидких и твёрдых тел. Но что самое важное — Дебора ясно высказала идею разных временных масштабов. За время своей жизни человек не заметит уменьшения горы — оно незначительно. А по временной шкале Бога горы текут! Учёные часто шутят — юмор помогает им в трудной работе. Числом Деборы они назвали отношение характерного времени

«настройки» молекул к времени наблюдения. Когда число Деборы велико, жидкость ведёт себя подобно твёрдому телу. При малых числах Деборы жидкость ведёт себя как ньютонова. В промежуточном случае, когда число Деборы порядка 1, жидкость обладает рядом аномальных свойств.

Пять тысяч лет назад индейцы Амазонии изобрели интересный способ... производства обуви. Они мазали свои ноги соком гевеи, похожим на беловатый сок одуванчика. Сок, похожий сначала на обыкновенную жидкость, спустя несколько минут застывал, образуя на ноге подобие идеального по форме эластичного ботинка.

Сок гевеи (латекс) представляет собой пример полимерной жидкости, состоящей из длинноцепочных молекул. В молекулярных масштабах полимер является жидкостью, а в макроскопических масштабах — твердым телом. Примером является каучук.

Эффект Томса

В 1950-е годы, когда американские пожарные начали добавлять полимерные добавки в жидкость, вытекающую из брандспойта, длина струи увеличилась в полтора раза. Полимерные добавки в смазывающих материалах повышают ресурсы станков и приборов. Такое удивительное и до конца не понятое явление уменьшения трения с помощью ничтожного количества полимеров называется эффектом Томса в честь английского химика Б. Томса, впервые обнаружившего его в 1948 году. С помощью эффекта Томса можно увеличивать скорость морских судов. Имеется гипотеза, что дельфины и другие обитатели морей и океанов тоже используют этот эффект для уменьшения гидродинамического сопротивления.

Упругие, тиксотропные и эластичные жидкости

Основное свойство жидкостей — растекание — находится в разительном противоречии со свойством деформированных тел — упругостью, то есть способностью восстанавливать свою форму после её искажения. Упругостью обладают и пружина в часах, и теннисный мяч, и мост, и здание. Некоторые неньютоновы жидкости, например, шампуни для волос, могут и растекаться по твёрдой поверхности, и отскакивать от неё. Такие жидкости называются *упругими*. Если упругую жидкость лить на блюдце тонкой струйкой, то струйка «отпрыгнет» от места блюдца, повторив свои отскоки несколько раз.

Шарик из силиконовой замазки тоже способен к прыжкам. Он отскакивает от стенки не хуже, чем резиновый мяч, а при резком ударе по нему молотком трескается. Однако предоставленный самому себе на длительное время он сплющивается, то есть течёт, как самая обыкновенная жидкость. Таков дуализм «жидкость — твёрдое тело»: когда нагрузки резкие, среда ведёт себя как твёрдое тело, а когда время действия малых сил значительно, среда подобна жидкости.

Силиконовая замазка обладает и другим аномальным свойством: струя обычной жидкости, вытекая из трубки, сужается, а выдавливаемая из трубки замазка увеличивается в объёме. Такое поведение объясняется существующими в ней внутренними растягивающими напряжениями. Они появляются, когда замазка плотно набивается в трубку, и снимаются на выходе из трубки, освобождённые от сдерживающего влияния стенок.

Многие широко применяемые в быту и в технике жидкости уменьшают вязкость при воздействии сдвиговых напряжений. Такие жидкости называются *тиксотропными*. Бутерброд удаётся изготовить только потому, что вязкость сливочного масла уменьшается при размазывании его ножом. Используя тиксотропность краски, опытный маляр избегает подтёков. Соус, кетчуп, желатиновый раствор, майонез, горчица, мёд, мыльный крем для бритья — всё это тиксотропные жидкости. Физическая природа тиксотропии до конца неизвестна. Наиболее распространённая гипотеза объясняет это явление изменением молекулярной конфигурации жидкости под воздействием напряжений сдвига: длинные молекулы ориентируются вдоль линий тока, что приводит к уменьшению коэффициента вязкости.

Один из удивительных фокусов основан на свойстве некоторых тиксотропных жидкостей, например раствора полиэтилена в воде, *самовытекаться* из сосуда. Если такое движение началось, то оно будет продолжаться без всяких внешних воздействий. Жидкость движется под действием внутренних межмолекулярных сил. Шланг, находящийся выше раствора полиэкса на двадцать сантиметров, может его всасывать.

Полной противоположностью тиксотропным жидкостям являются *зыбучие пески*. Их вязкость увеличивается с ростом напряжений, поэтому выбраться из зыбучего песка с помощью резких движений нельзя: плывун тем сильнее удерживает вас, чем сильнее вы его раздвигаете. Выбираться из зыбучего песка следует неторопливо: лечь на спину и, освободив ноги, выкатиться из опасной зоны.

Соударяясь с плоскостью, струя воды растекается во все стороны. Совсем по-другому ведут себя так называемые *эластичные жидкости*

(густое масло, патока, мёд, жидкий шоколад и др.). Эластичная жидкость не успевает растекаться по плоскости, поэтому осесимметричная струя накручивается на плоскость кольцами, а плоская — лентой.

Жидкие кристаллы состоят из твердой части, к концам которой присоединены две гибкие цепочки молекул. Эти молекулы ориентируются с помощью слабых электрических или оптических сигналов. Жидкие кристаллы используются в световых табло.

Снова вращение

Красивый опыт, аналогичный тейлоровскому, демонстрирует резиноподобное поведение обычной краски. Если в узкий промежуток между двумя коаксиальными цилиндрами, из которых внутренний может вращаться, налить глицерин, отжать туда из пипетки несколько капель краски и повернуть внутренний цилиндр примерно на 10 оборотов, то можно увидеть, как краска вытянется в тонкий слой, спирально намотанный на вращающийся цилиндр. Если затем, не дожидаясь, пока краска расплывётся вследствие диффузии, повернуть цилиндр на столько же оборотов в противоположном направлении, то слой краски почти полностью размотается, и её распределение окажется примерно таким же, каким было до вращения.

Вставьте во вращающийся стакан с водой неподвижный стержень, ось которого совпадает с осью стакана. Свободная поверхность не утратит форму параболоида вращения. Если же вместо воды взять подсолнечное масло, то оно поднимется в центре стакана, свободная поверхность уже не будет параболоидом. Опыт можно изменить: вращать не стакан, а стержень. Эффект не исчезнет.

Качественное объяснение таково. Ньютонова жидкость мало изменяет структуру течения вблизи стержня. В неньютоновой жидкости на поверхности стержня под действием вязкости происходит значительное увеличение завихренности, в связи с чем увеличивается давление, что и приводит к поднятию уровня жидкости на оси стакана.

Если вращающийся диск разместить вверху неподвижного стакана на поверхности налитой туда жидкости, то наряду с первичным закрученным потоком возникнет вторичный меридиональный поток, который на оси стакана в ньютоновой жидкости направлен вверх, а в неньютоновой — вниз.

Некоторые свойства упругих жидкостей поразительны. Если раскрутить чайной ложкой томатный суп в кастрюле, а затем её вынуть, то, как и следовало ожидать, суп начнёт замедлять своё вращение до полной

остановки. Однако в последние несколько секунд он будет вращаться в противоположном направлении! Объяснение таково. Когда вращение основной массы супа почти прекращается из-за трения о стенки и дно кастрюли, его поверхностный слой продолжает вращение по инерции. Возникающий со стороны заторможенной части жидкости крутящий момент, как во всякой упругой среде, заставляет этот слой совершать крутильные колебания подобно маятнику. Правда, они быстро затухают.

Приложение D

Очерк о методах возмущений

Методы возмущений приспособлены для решения уравнения $f(x, \varepsilon) = 0$, когда параметр ε можно считать малым ($\varepsilon \to 0$) или большим ($\varepsilon \to \infty$). Один случай переходит в другой, например, с помощью замены ε на $1/\varepsilon$.

Методы возмущений лежат в основе любой теории (Евклида, И. Ньютона, Ч. Дарвина, А. Смита, К. Маркса, А. Эйнштейна, В. Вернадского и т. д.), ибо каждая из них — это идеализация реального явления, построенная в предположении, что некоторые определяющие параметры устремлены к своим предельным значениям. Методы возмущений — это не дань моде и не абстрактный математический аппарат, а стиль работы естествоиспытателя. Они являются главенствующими как в фундаментальных, так и в прикладных исследованиях, успешно конкурируя с вычислительными методами. Лучше сказать — эти метода взаимно дополняют друг друга.

Научно-популярное изложение методов возмущений, являющееся одной из важнейших современных задач в области математического обучения, сталкивается со значительными трудностями. Поскольку методы возмущений основаны на центральных понятиях математического анализа (предел, ряды, сходимость, O-символика и т. д.), проникнуть через их «толщу» удается лишь со значительными издержками — со снижением уровня строгости. Впрочем, при любой попытке адаптирования математических или физических методов страдает логика и последовательность изложения.

Другая трудность заключается в том, что корректность методов возмущений, зародившихся в начале XIX века, до сих пор не доказана. Такова драма идей: прикладники используют методы, которые «чистые» математики (пуристы) не признают.

Методы возмущений не были открыты в результате внезапного озарения одного математика. Из многочисленных ученых, занимавшихся разработкой методов возмущений, кроме А. Пуанкаре, о котором упоминается в тексте, следует назвать еще двух выдающихся математиков.

Французский астроном, математик и физик Пьер Симон Лаплас (1749–1827) широко использовал в своих исследованиях ряды. Решая задачу о равновесии большой невесомой капли на плоскости, он впервые использовал метод возмущений. Это был интуитивный прорыв в неизвестное. Лапласу принадлежит удивительная по емкости характеристика методов возмущений: «Математический метод тем более точен, чем он более необходим».

Французский математик Огюстен Луи Коши (1789–1857), один из основателей математического анализа, дал четкое построение теории сходящихся рядов, указав признаки их сходимости. Естественно, что в то время расходящиеся ряды никакого интереса для Коши не представляли. Его авторитет был настолько велик, что практическое применение асимптотических разложений надолго задержалось. В настоящее время асимптотические, как правило, расходящиеся ряды являются важнейшим инструментом исследования.

История методов возмущений знает два триумфальных момента. В 1846 году французский астроном, иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук Урбен Лаверье открыл планету, названную впоследствии Нептуном. Открытие было весьма необычным: Лаверье не воспользовался телескопом, как это всегда делали для подобных целей его предшественники. Он открыл новую планету «на кончике пера», исследуя *возмущения*, которые она, загадочная невидимка, вносила в движение другой планеты — Урана. В том же 1846 году по координатам, рассчитанным Леверье, неизвестную дотоле планету обнаружил на небосклоне (уже с помощью телескопа) немецкий астроном Иоганн Галле.

Это был первый триумф методов возмущений. А второй — открытие в 1905 году (тоже «на кончике пера»!) выдающимся немецким гидродинамиком Людвигом Прандтлем (1875–1953) так называемого пограничного слоя — тонкой прилегающей к поверхности тела области, где очень сильно изменяется скорость потока слабовязкой жидкости. Это открытие имело важнейшее значение для дальнейшего развития транспорта и энергетики.

Сегодня не только физики, но и математики называют пограничным слоем узкую область или малый интервал, в котором функция претерпевает резкое изменение.

В основу данного очерка положена лекция, которую автор ежегодно читал на протяжении многих лет студентам старших курсов МФТИ по программе теоретической гидродинамики. Разумеется, лекция значительно расширена и адаптирована. Совсем исключены из рассмотре-

ния дифференциальные и интегральные уравнения и некоторые методы, приспособленные для решения таких уравнений. Таким образом, очерк представляет собой элементарное введение в теорию возмущений.

D.1. Разложение функций в ряды

Бесконечно дифференцируемая в точке $x = a$ функция $f(x)$ представима в виде ряда по степеням $(x - a)$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n. \qquad \text{(D.1)}$$

Постоянные a_n легко определить по значениям функции $f(x)$ и ее производных в точке $x = a$. Полагая в (D.1) $x = a$, находим значение $a_0 = f(a)$. Дифференцируя (D.1) по x:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \ldots \qquad \text{(D.2)}$$

и снова полагая $x = a$, находим значение $a_1 = f'(x)$. Дифференцируя (D.2) по x, точно так же определяем $a_2 = \frac{1}{2!}f''(a)$. Такой процесс можно продолжать неограниченно с целью определения всех коэффициентов $a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$. Следовательно, разложение (D.1) записывается в виде ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-a)^n f^n(a), \qquad \text{(D.3)}$$

который называется рядом Тейлора. В частном случае, когда $a = 0$, получается ряд Маклорена:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n f^n(0). \qquad \text{(D.4)}$$

Такие ряды мы будем часто использовать в дальнейшем.

Пусть $f(x) = (1-x)^{-1}$, тогда $f^n(x) = n!(1-x)^{-n-1}$ и ряд (D.4) имеет простой вид суммы членов геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} x^m. \qquad \text{(D.5)}$$

Так как $\frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x$, имеем: $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots = \sum_{\infty}^{n=0} \frac{1}{n!}x^n$.

Аналогично, с помощью формул: $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$, $\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$, получаем:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n}.$$

Если при $n \to \infty$ сумма $f_N = \sum_{n=0}^{N} a_n(x-a)^n$ имеет конечный предел $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, то говорят, что ряд (D.1) *сходится* к функции $f(x)$.

Ряд (D.5) сходится при $|x| < 1$, но представляет собой бессмыслицу, например при $x = 2$. Всегда ли расходящиеся ряды бессмысленны? Чтобы ответить на этот вопрос, нам придется познакомиться в следующих параграфах с так называемыми *асимптотическими разложениями*.

Часто приходится иметь дело с задачей обращения функции, заданной степенным рядом. Пусть $y = \frac{x}{f(x)}$, где $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Требуется найти такую функцию $x = x(y)$, удовлетворяющую равенству $yf(x) - x = 0$. Справедлива *теорема обращения Лагранжа*: обратная функция $x = x(y)$ существует в некоторой окрестности точки $y = 0$ и представима в виде ряда

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y^n, \tag{D.6}$$

где $c_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f^n(x)\right]_{x=0}$, $c_1 = a_0$.

Теорема Лагранжа доказывается (в две строчки!) на втором-третьем курсе технического института. Поэтому мы оставим ее без доказательства, выписав лишь значения первых четырех коэффициентов c_n, которые легко проверить самостоятельно:

$$c_1 = a_0, \quad c_2 = a_0 a_1, \quad c_3 = a_0 a_1^2 + \frac{1}{3}a_0^2(2a_1 + a_2),$$

$$c_4 = a_0(a_0 a_1^2 + a_1^3 + 2a_0 a_1 a_2 + a_0^2 a_3).$$

Не ограничивающий общности вид функции $x = yf$ выбран специально, чтобы формула для коэффициентов степенного ряда (D.6) оказалась наиболее простой.

Некоторые задачи о разложении в ряд неявных функций решаются прямым применением теоремы обращения Лагранжа.

Рассмотрим в качестве первого примера решение уравнения $xe^x = 1/z$ при $z \to \infty$. Так как $1/z$ стремится к нулю, формула Лагранжа (D.6) применима к уравнению $yf(x) = x$, где $f(x) = e^{-x}$, $y = z^{-1}$. Тогда $f^n(x) = e^{-nx}$ и $c_n = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-nx}\right)_{x=0} = (-1)^{n-1}\dfrac{n^{n-1}}{n!}$. Следовательно, при достаточно больших z справедливо разложение: $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n!}n^{n-1}z^{-n}$.

Второй пример — ряд Лагранжа (D.6) для функции $y = 2\dfrac{x}{(x+t)^2 - 1}$, $x = 0$ при $y = 0$. Параметр t может принимать любые значения, кроме ± 1.

Так как $2f(x) = (x+t)^2 - 1$, то

$$c_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}f(x)\right]_{x=0} = \frac{1}{n!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\frac{(x+t)^2-1)}{2}\right]^n\right\}_{x=0} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{\xi^2-1}{2}\right)^n\right\}_{\xi=t} = \frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^n.$$

Ряд Лагранжа имеет вид:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^n y^n. \tag{D.7}$$

Зависимость x от y выражается в явном виде:

$$x = -t + \frac{1 - \sqrt{1 - 2ty + y^2}}{y}. \tag{D.8}$$

Из двух значений арифметического корня здесь взято то его значение, которое соответствует $x = 0$ при $y = 0$. Дифференцируя (D.8) по t, получим:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -1 + \frac{1}{\sqrt{1 - 2ty + y^2}}.$$

С другой стороны, эту же производную можно найти, продифференцировав ряд (D.7): $\frac{\partial x}{\partial t} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{t^2-1}{2} \right)^n$. Сравнивая два выражения для производной $\frac{\partial x}{\partial t}$, находим: $\frac{1}{\sqrt{1-2ty+y^2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 2^{-n} y^n \frac{d^n}{dt^n} (t^2-1)^n$. Коэффициенты этого ряда зависимы от параметра t. Функция $(t^2-1)^n$ есть многочлен степени $2n$ относительно t, поэтому производная $\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$ является многочленом степени n относительно t, а функции $2^{-n}\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$ суть многочлены степени n относительно t. Это — замечательные многочлены, нашедшие широкое применение во всех разделах теоретической физики! Называются они многочленами Лежандра и обозначаются $P_n(t)$. Итак, $P_n(t) = 2^{-n}\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$. Вот многочлены Лежандра низших степеней:

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2-1),$$

$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3-1), \quad P_4 = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3).$$

Функция $\frac{1}{\sqrt{1-2ty+y^2}}$ называется *производящей функцией* полиномов Лежандра: коэффициентами ее разложения в ряд Маклорена по y являются полиномы Лежандра.

D.2. O-символика

Асимптота (от греческого слова asymptotos — несовпадающий, некасающийся) — это прямая, к которой неограниченно приближается уходящая на бесконечность ветвь кривой. Термин «асимптота» применительно к гиперболе приписывают Аполлонию Пергскому (III век до н. э.). Асимптота может быть пересекающейся со своей кривой — такова, например, асимптота функции $y = 1 + e^{-x}\sin x$, описывающей затухающие колебания, а может и не пересекать кривую — такова асимптота гиперболы $y = 1 + 1/x$, $x > 0$.

Насколько просто ввести понятие асимптоты, настолько трудно ответить на вопрос: «Что такое асимптотика?». В расширенном толковании

этого термина сюда можно отнести чуть ли не весь математический анализ. В суженном смысле слова асимптотикой является математическая конструкция, в которой используется асимптотическая оценка — приближенное выражение, тем более точное, чем меньше отклонение функции от некоторого заданного значения. Приведем, к сожалению, снова без вывода две асимптотические оценки, ставшие классическими.

Для любого положительного x обозначим через $\pi(x)$ количество простых чисел, не превосходящих x. Так называемый закон распределения простых чисел гласит, что $\pi(x) \to \dfrac{x}{\ln x}$ при $x \to \infty$.

Тот факт, что функция $\dfrac{\pi \ln x}{x}$ имеет своим пределом единицу, можно записать с помощью символа lim (сокращение от латинского слова limes — межа, граница): $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi(x)\ln x}{x} = 1$.

Второй пример — формула Стирлинга: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n n!}{n^n\sqrt{2\pi n}} = 1$. Конечно, никаких принципиальных трудностей для вычисления $n!$ нет. Но, чем больше число n, тем большее число операций необходимо для такого вычисления. Формула Стирлинга дает удобную оценку для $n!$, и чем больше n, тем меньше относительная погрешность оценки.

Этот очерк посвящен исследованию пределов различных функций, в частности предела функции $f(\varepsilon)$ при ε, стремящимся к нулю. Вообще говоря, этот предел зависит от того, стремится ли ε к нулю справа ($\varepsilon \to +0$), оставаясь положительным, или слева ($\varepsilon \to -0$), оставаясь отрицательным. Так, $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} e^{1/\varepsilon} = \infty$, но $\lim\limits_{\varepsilon\to-0} e^{1/\varepsilon} = 0$. Если особо не оговорено, то в дальнейшем подразумевается, что $\varepsilon > 0$.

Не каждая функция имеет определенный числовой предел. Например, функция $\sin(1/\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ такового не имеет. Но если предел существует, то он равен конечной величине, нулю или бесконечности. Вот некоторые примеры:

$$\lim_{\varepsilon\to0} \sin\varepsilon = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to0} \cos\varepsilon = 1, \quad \lim_{\varepsilon\to0} (\varepsilon - \sin\varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to0} x^{-1/\varepsilon} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\sin\varepsilon} = \infty, \quad \lim_{\varepsilon\to+0} \ln\frac{1}{\varepsilon} = \infty, \quad \lim_{\varepsilon\to0} (1+\varepsilon)^{1/\varepsilon} = e, \quad \lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon^{\varepsilon} = 1.$$

В результате перехода к пределу отбрасывается информация о функции, которая подменяется некоторым пределом (числом). Гораздо меньше информации отбрасывается при использовании обозначения O. В этом случае теряется информация о числе, хотя вводится дополнительная информация о некоторой так называемой *калибровочной функции* $\delta(\varepsilon)$.

Поведение искомой функции $f(\varepsilon)$ сравнивается с поведением калибровочной функции $\delta(\varepsilon)$. Точнее говоря, выражение[1] $f(\varepsilon) = O(\delta)$ при $\varepsilon \to 0$ означает, что существует предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{f(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)} = c$, где $|c| < \infty$.

Вот примеры асимптотического поведения некоторых функций при $\varepsilon \to 0$: $\sin\varepsilon = O(\varepsilon)$, $\cos\varepsilon = O(1)$, $\operatorname{ctg}\varepsilon = O(\varepsilon^{-1})$, $e^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2)$, $\ln(1+\varepsilon) = O(\varepsilon)$.

O-оценка устанавливает порядковое равенство двух величин. При этом отсутствие значения константы c, равной их асимптотическому отношению, остается неизвестным. Отсутствие такой информации заменяется утверждением, что число c существует. Его конкретное значение может быть равно миллиарду или одной миллиардной, — это не важно! — *лишь бы величина c существовала и могла быть, в принципе, определена.*

Когда предел отношения f/δ равен нулю, используется символ o. Равенство[2] $f(\varepsilon) = o(\delta)$ при $\varepsilon \to 0$ означает, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{f(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)} = 0$.

Такая оценка устанавливает недостижимую верхнюю границу для функции f. Примеры o-оценок при $\varepsilon \to 0$: $\sin^2\varepsilon = o(\varepsilon)$, $e^{-1/\varepsilon} = o(\varepsilon^k)$ при любом $k > 0$.

В заключение этого параграфа приведем некоторые формулы, касающиеся комбинирования соотношений порядка:

$$O[O(f)] = O(f), \quad O[o(f)] = o[O(f)] = o(f), \quad O(f)O(\varphi) = O(f\varphi),$$
$$O(f)o(\varphi) = o(f\varphi), \quad O(f) + O(f) = O(f), \quad o(f) + o(f) = o(f).$$

Эти очевидные формулы могут быть распространены на комбинации любого конечного числа O- и o-символов.

D.3. Асимптотические разложения

Можно себе представить в качестве мысленного эксперимента следующий процесс вычислений. На первом шаге дается O-оценка функции $f(\varepsilon) = O(\delta_1)$ и определяется коэффициент $c_1 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{f}{\delta_1(\varepsilon)}$. На втором шаге дается O-оценка функции $f - c_1\delta_1 = O(\delta_2)$ и определяется коэффициент $c_2 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{f - c_1\delta_1}{\delta_2(\varepsilon)}$. Повторяя такие действия N раз, получим так на-

[1] Читается так: «f равняется O большое от δ».

[2] Читается так: «f равняется o малое от δ».

зываемое *асимптотическое разложение функции* $f(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{N-1} c_n\delta_n(\varepsilon) + O[\delta_N(\varepsilon)]$, или, что то же самое, $f(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{N} c_n\delta_n(\varepsilon) + o[\delta_N(\varepsilon)]$. Из самого способа построения асимптотического разложения очевидно, что

$$\delta_{n+1}(\varepsilon) = o[\delta_n(\varepsilon)] \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{D.9}$$

то есть $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\delta_{n+1}(\varepsilon)}{\delta_n(\varepsilon)} = 0$.

Последовательность функций $\delta_n(\varepsilon)$, удовлетворяющих этому условию, называется *асимптотической последовательностью.*

Асимптотическое разложение функции $f(\varepsilon)$ зависит от выбора асимптотической последовательности калибровочных функций δ_n, поэтому может быть построено различными способами. Однако для заданной асимптотической последовательности калибровочных функций асимптотическое разложение единственное, так как его коэффициенты однозначно и последовательно определяются по формулам:

$$c_k = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(\varepsilon) - \sum\limits_{n=1}^{k-1} c_n\delta_n(\varepsilon)}{\delta_k(\varepsilon)}.$$

Не всегда можно построить асимптотическое разложение на основе априори выбранной асимптотической последовательности. В этом случае говорят о несовместимости функций $f(\varepsilon)$ и $\delta_n(\varepsilon)$. Так, функция $f(\varepsilon) = \cos(\varepsilon)$ несовместима с асимптотической последовательностью $\delta_n = \varepsilon^{n+1/2}$.

Если все калибровочные функции представляют собой целые положительные степени ε, то есть $\delta_n = \varepsilon^n$, то говорят об *асимптотическом степенном ряде.*

Не следует требовать сходимости бесконечного асимптотического ряда. В практических задачах вычисление каждого члена разложения дается с немалым трудом, поэтому исследователю известно лишь несколько первых членов. Установить по ним, сходится или расходится ряд, конечно, невозможно. Но было бы ошибочно считать, что без сходимости нельзя обойтись. O-оценка вполне достаточна для практических нужд.

Таким образом, сосуществуют два принципиально различных взгляда на использование рядов.

Сумма членов сходящегося ряда $\sum$ стремится к конечному пределу $\sum_0$ при $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$, $N \to \infty$. В этом случае фиксировано ε.

Сумма членов асимптотического ряда, как правило, не сходится к конечному пределу при $N \to \infty$. В этом случае фиксировано N ($N = N_0 < \infty$), а величина ε стремится к нулю с тем, чтобы обеспечить решению необходимую O-точность.

Следует отметить, что даже для сходящегося асимптотического ряда его сумма не обязательно равна f. Пример — разложение в степенной ряд экспоненциально малой величины $e^{-1/\varepsilon} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot \varepsilon + 0 \cdot \varepsilon^2 + \ldots$ при $\varepsilon \to 0$. Сумма этого ряда всегда равна нулю. Общения с экспоненциально малыми членами стараются избегать ввиду того, что разрывен предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{-x/\varepsilon}}{e^{-1/\varepsilon}} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x > 1, \\ 1 & \text{при} \quad x = 1, \\ \infty & \text{при} \quad x < 1. \end{cases}$$

Такая ситуация, когда функция зависит лишь от одного параметра, предельно упрощена. В общем случае функция f зависит от нескольких переменных (мы их обозначим одной буквой x) и от нескольких параметров, из которых выделим один — ε — тот, по которому производится разложение. Коэффициенты разложения функции f зависят от x:

$$f(x;\varepsilon) = \sum_{n=1}^{N-1} c_n(x)\delta_n(\varepsilon) + O[x, \delta_N(\varepsilon)]. \qquad \text{(D.10)}$$

Такой ряд может оказаться совершенно непригодным даже тогда, когда выполняется условие (D.9)! Ведь при некоторых значениях x коэффициент $c_n(x)$ может неограниченно возрастать. В этом случае говорят о *неравномерной пригодности разложения* (D.10), о его особом характере или о *сингулярности*. Например, степенные разложения, справедливые при $\varepsilon \to 0$:

$$f(x;\varepsilon) = \sqrt{x+\varepsilon} = \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{x}} = \sqrt{x}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2x} - \frac{\varepsilon^2}{8x^2} + \frac{\varepsilon^3}{16x^3} + \ldots\right),$$

$$f(x;\varepsilon) = x^{\varepsilon} = e^{\varepsilon \ln x} = 1 + \varepsilon \ln x + \ldots,$$

не являются равномерно пригодными в окрестности точки $x = 0$. Размеры области неоднородности разложения легко оценить, если приравнять по порядку величины два соседних члена, первый из которых не является особым. Асимптотическое разложение функции $\sqrt{x+\varepsilon}$ сингулярно, когда $\varepsilon/x = O(1)$, то есть $x = O(\varepsilon)$. Асимптотическое разложение функции x^{ε} непригодно, когда $\varepsilon \ln x = O(1)$, то есть $x = O(e^{-1/\varepsilon})$.

Таким образом, разложение (D.10) сингулярно, если $c_{n+1}\delta_{n+1} = O(c_n\delta_n)$ при $\varepsilon \to 0, x \to x_0$. В этом случае говорят о *задаче особых возмущений*. В физике такие задачи являются скорее правилом, чем исключением.

Три основные причины появления сингулярности в асимптотических разложениях проиллюстрируем примерами.

Пример 1. Пусть $f(x;\varepsilon) = \frac{1}{1+\varepsilon x}$, $0 \leqslant x \leqslant \infty$. Асимптотическое степенное разложение $f(x;\varepsilon) = 1 - \varepsilon x + \varepsilon^2 x^2 - \varepsilon^3 x^3 + \ldots$ непригодно в области $x = O(1/\varepsilon)$. Такая непригодность появляется при больших значениях x и связана с тем, что область определения x является бесконечной. При больших значениях x расхождение с функцией $f(x;\varepsilon)$ все более увеличивается.

В приложениях часто появляются члены типа $\varepsilon^m x \sin(x+\alpha)$ или, в общем случае, произведения алгебраических и тригонометрических функций. Их принято называть *вековыми* или *секулярными* (от французского слова siecle — век, столетие) членами. Такое название им дали астрономы — именно они впервые встретились с секулярными членами. В астрономических приложениях величина ε оказалась настолько малой, что секулярные члены становились заметными лишь по истечении очень большого промежутка времени x, порядка столетия.

Пример 2. Функция $f(x;\varepsilon) = \frac{1}{x+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, имеет особенность при $x = -\varepsilon$ — бесконечный разрыв. Если выбрать интервал изменения x от 0 до ∞, то особая точка окажется вне этого интервала. Однако степенное асимптотическое разложение функции $\frac{1}{x+\varepsilon} = \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon}{x^2} + \frac{\varepsilon^3}{x^3} + \ldots$ сдвигает особенность на границу интервала изменения x — в точку $x = 0$. И этот факт является причиной неоднородности разложения при $x = O(\varepsilon)$. При малых значениях x неоднородность асимптотического приближения существенна.

Пример 3. Неоднородность может возникнуть, когда исходное уравнение изменяет свой тип при $\varepsilon = 0$. Дифференциальное уравнение: $\varepsilon\frac{df}{dx} - f^2 - 1 = 0$ при $\varepsilon = 0$ переходит в алгебраическое уравнение $f^2+1=0$, не имеющее действительных решений. Исходное дифференциальное уравнение имеет действительное решение: $f(x;\varepsilon) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{\varepsilon} + c\right)$, где c — произвольная постоянная. И в этом можно убедиться непосредственной подстановкой.

D.4. Решение квадратного уравнения

Наиболее простым объектом для применения методов возмущений является квадратное уравнение

$$a(\varepsilon)x^2 + b(\varepsilon)x + c(\varepsilon) = 0, \tag{D.11}$$

у которого коэффициенты a, b, c разложимы в степенные асимптотические ряды по малому параметру ε: $a(\varepsilon) = a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \ldots$, $b(\varepsilon) = b_0 + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2 + \ldots$, $c(\varepsilon) = c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \ldots$.

По меньшей мере один из трех коэффициентов a_0, b_0 или c_0 не равен нулю — в противном случае уравнение (D.11) можно упростить, сократив на ε.

Самый простой метод решения квадратного уравнения заключается в подстановке разложений коэффициентов a, b, c в точное решение и переразложении его по малому параметру ε. Такой метод пригоден для решения квадратных уравнений, но непригоден для уравнений, не имеющих решений в замкнутой форме (см. ниже). Поэтому с целью применения методов возмущений к решению произвольных уравнений мы будем пользоваться точным решением уравнения (D.11) лишь в исключительных случаях, когда ситуация нестандартна. Общий метод решения уравнений заключается в представлении разложения функции $x(\varepsilon)$ в достаточно произвольном виде, подстановке его в исходное уравнение и последовательном приравнивании нулю сумм членов одинакового достоинства для определения неизвестных коэффициентов разложения $x(\varepsilon)$.

Полагая сначала, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} a(\varepsilon) \neq 0$, то есть $a_0 \neq 0$, приведем уравнение (D.11) к виду:

$$x^2 - 2p(\varepsilon)x + q(\varepsilon) = 0, \tag{D.12}$$

где $-2ap = b$, $aq = c$, $p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \ldots$, $q = q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \ldots$

Будем искать решение задачи в виде степенного ряда:

$$x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots \tag{D.13}$$

Подставив (D.13) в уравнение (D.12) и собрав члены с одинаковой степенью ε, получим:

$$x^2 - 2p_0x_0 + q_0 + (2x_0x_1 - 2p_0x_1 - 2p_1x_0 + q)\varepsilon + \\ + (2x_0x_2 + x_1^2 - 2p_0x_2 - 2p_2x_0 + q_2)\varepsilon^2 + \ldots = 0.$$

Поскольку это равенство справедливо при любом значении ε, каждый член этого ряда должен тождественно равняться нулю. Последовательно находим: $x_0 = p_0 \pm \sqrt{p_0^2 - q_0}$, $x_1 = \dfrac{p_1 x_0 - q_1/2}{x_0 - p_0}$, $x_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{2p_2 x_0 - x_1^2 - q_1}{x_0 - p_0}$, ...

Знаменатель в этих выражениях всегда пропорционален некоторой степени $x_0 - p_0$. Поэтому разложение (D.13) равномерно пригодно, когда $x_0 \neq p_0$, то есть $p_0^2 \neq q_0$.

А что делать, если $p_0^2 = q_0$? В подобной тупиковой ситуации должна выручать догадка, интуиция. Конечно, в этом простом примере — квадратном уравнении — существует точное решение: $x = p \pm \sqrt{p^2 - q}$; как мы и намечали, естественно сразу же обратиться к нему. При $p_0^2 = q_0$ подкоренное выражение имеет порядок $O(\varepsilon)$, поэтому асимптотическое разложение функции $x(\varepsilon)$ содержит *полуцелые* степени ε:

$$x = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \ldots + \sqrt{\varepsilon}\left(\sqrt{2p_0p_1 - q_1} + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{p_1^2 + 2p_0p_2 - q}{\sqrt{2p_0p_1 - q_1}} + \ldots\right),$$

$$2p_0p_1 \neq 0.$$

Если $2p_0p_1 = 0$, то нецелых степеней нет, снова справедливо разложение (D.13).

С помощью точного решения легко установить, содержит ли этот ряд для функции $x(\varepsilon)$ нецелые степени ε. Пусть $p^2 - q = \varepsilon^n d_n + \varepsilon^{n+1} d_{n+1} + \ldots$, где $d_n \neq 0$, $n > 0$, — целое число. Тогда ряд для x содержит полуцелые степени ε, если n нечетно, и не содержит полуцелых степеней ε, если n четно.

Осталось рассмотреть случай, когда $a_0 = 0$. Пусть $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0$. Тогда уравнение $(\varepsilon^n a_n + \varepsilon^{n+1} a_{n+1} + \ldots)\, x^2 + b(\varepsilon)x + c(\varepsilon) = 0$ приводимо к виду:

$$\varepsilon^n x^2 + g(\varepsilon)x + h(\varepsilon) = 0, \tag{D.14}$$

где $g = \dfrac{b}{A_n} = g_0 + \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \ldots$, $h = \dfrac{c}{A_n} = h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \ldots$, $A_n = a_n + \varepsilon a_{n+1} + \varepsilon^2 a_{n+2} + \ldots$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Если $h_0 = 0$, то уравнение (D.14) в развернутом виде записывается так:

$$\varepsilon^n x^2 + (g_0 + \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \ldots) + \varepsilon^k h_k + \varepsilon^{k+1} h_{k+1} + \ldots = 0, \tag{D.15}$$

где $g_0 \neq 0$; $k = 1, 2, 3, \ldots$

Резонно предположить, что первый член уравнения (D.15) мал, и отбросить его. Тогда сразу же получается оценка для одного из корней: $x^{(1)} = O(\varepsilon^k)$ — и асимптотический ряд для него: $x^{(1)} = \varepsilon^k(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots)$.

Таким способом определится только один корень уравнения. Для нахождения второго решения следует снова обратиться к исходному уравнению (D.15). По теореме Виетта, при $\varepsilon \to 0$, $x^{(1)}x^{(2)} = h_k\varepsilon^{k-n}$. Следовательно, $x^{(2)} = O(\varepsilon^{-n})$.

Значение второго корня при $\varepsilon \to 0$ бесконечно велико. Его асимптотический ряд имеет вид: $x^{(2)} = \varepsilon^{-n}(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \ldots)$.

Оба корня действительны и различны. При $\varepsilon = 0$ величина x претерпевает разрыв.

Если в уравнении (D.14) $g_0 = 0$, то оно запишется так:

$$\varepsilon^n x^2 + \varepsilon^m(g_m + \varepsilon g_{m+1} + \varepsilon^2 g_{m+2} + \ldots)x + h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \ldots = 0, \quad \text{(D.16)}$$

где $g_m \neq 0$; $h_0 \neq 0$; $m = 1, 2, 3, \ldots$

Это уравнение имеет различные решения в зависимости от знака величины $2m - n$. Когда $2m - n \geqslant 0$, асимптотический ряд для обоих корней по форме одинаков:

$$x^{(1)} = \varepsilon^{-n/2}(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots) - \frac{1}{2}\varepsilon^{m-n}(q_m + \varepsilon q_{m+1} + \ldots).$$

Если $2m - n < 0$, то корни уравнения (D.16) действительны, асимптотические ряды различны по форме:

$$x^{(1)} = \varepsilon^{m-n}(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots), \quad x^{(2)} = \varepsilon^{-m}(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \ldots).$$

Случай $g_0 \neq 0$, $h_0 \neq 0$ получается отсюда при $m = 0$.

D.5. Уравнения высших степеней

Уравнение вида $P_n = 0$, где P_n — многочлен n-й степени, называется *алгебраическим уравнением*. Алгебраическое уравнение с одним неизвестным — а мы рассматриваем уравнения только с одним неизвестным x — имеет вид: $P_n = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$. Здесь: $a_0 \neq 0$, n — целое положительное число, называемое *степенью уравнения*. В нашем случае коэффициенты уравнений $a_0, a_1, \ldots, a_n$ не являются постоянными, а суть функции параметра ε. Будем считать их разложенными в асимптотический ряд по целым степеням ε. Тогда разложение решения

тоже окажется степенным. Как мы уже убедились в предыдущем параграфе, степени разложения принимают целые и дробные, положительные и отрицательные значения. Рассмотрим все эти случаи на конкретных примерах.

Пример 1. Уравнение

$$x^3-(4+\varepsilon)x^2+(5-2\varepsilon)x-2+\varepsilon^2=0 \tag{D.17}$$

имеет решение вида: $x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2x_2+\ldots$ Подстановка его в уравнение (D.17) дает: $(x_0+\varepsilon x_1+\ldots)^3-(4+\varepsilon)(x_0+\varepsilon x_1+\ldots)^2-2+\varepsilon^2=0$, или: $x_0^3-4x_0^2+5x_0-2+\varepsilon(3x_0^2x_1-8x_0x_1-x_0^2+5x_1-2x_0)+\ldots=0$.

Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим бесконечную систему уравнений:

$$x_0^3-4x_0^2+5x_0-2=0, \tag{D.18}$$

$$3x_0^2x_1-8x_0x_1-x_0^2+5x_1-2x_0=0, \tag{D.19}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Уравнение (D.17) называется *возмущенным уравнением*, а уравнение (D.18), полученное из него при $\varepsilon=0$, — *невозмущенным уравнением*. Его корни равны: $x_0^{(1)}=2$, $x_0^{(2)}=1$, $x_0^{(3)}=1$.

Из решения уравнения (D.19) $x_1=\dfrac{x_0^2+2x_0}{3x_0^2-8x_0+5}$ при $x_0=2$ находим: $x_1^{(1)}=8$. Следовательно, асимптотический ряд для первого корня имеет вид: $x^{(1)}=2+8\varepsilon+\ldots$

При $x_0=1$ получаем: $x_1^{(2)}=\infty$, что указывает на неправильно выбранную форму решения. С целью построения асимптотического ряда для второго и третьего корня представим решение в виде:

$$x=1+\varepsilon^\gamma x_1+\varepsilon^{2\gamma}x_2+\ldots,\quad \gamma>0.$$

Снова подставим это разложение в уравнение (D.17):

$$(1+\varepsilon^\gamma x_1+\ldots)^3-(4+\varepsilon)(1+\varepsilon^\gamma x_1+\ldots)^2+(5-2\varepsilon)(1+\varepsilon^\gamma x_1+\ldots)-2+\ldots=0.$$

Главных членов разложения два: $-x_1^2\varepsilon^{2\gamma}$ и -3ε. Чтобы они скомпенсировали друг друга, показатель степени 2γ должен быть равен 1. Тогда $x_1=\pm i\sqrt{3}$ и мы имеем: $x^{(2)}=1+\varepsilon^{1/2}i\sqrt{3}+\ldots$, $x^{(3)}=1-\varepsilon^{1/2}i\sqrt{3}+\ldots$

Пример 2. Уравнение $x^3+\varepsilon x+\varepsilon=0$ не имеет решения в виде ряда по целым степеням ε. Положим $x=\varepsilon^\gamma x_1+\varepsilon^{2\gamma}x_2+\ldots$ и подставим

в исходное уравнение: $(\varepsilon^\gamma x_1+\varepsilon^{2\gamma}x_2+\ldots)^3+\varepsilon(\varepsilon^\gamma x_1+\varepsilon^{2\gamma}x_2+\ldots)+\varepsilon=0$. Сумма старших членов в этом выражении $\varepsilon^{3\gamma}x_1^3+\varepsilon$ равна нулю, если $\gamma=1/3$, $x_1^3=-1$. Члены следующего порядка малости $3\varepsilon^{4\gamma}x_1^2x_2+\varepsilon^{1+\gamma}x_1$ зануляются, если $3x_1x_2=-1$. Искомое разложение таково: $x=\varepsilon^{1/3}x_1-\frac{1}{3x_1}\varepsilon^{2/3}+\ldots$, где $x_1^3=-1$.

Пример 3. После подстановки в уравнение $x^5+\varepsilon x^2-\varepsilon x+\varepsilon^2=0$ ряда $x=\varepsilon^\gamma x_1+\varepsilon^{2\gamma}x_2+\ldots$ получим:

$$(\varepsilon^\gamma x_1+\varepsilon^{2\gamma}x_2+\ldots)^5+\varepsilon(\varepsilon^\gamma x_1+\varepsilon^{2\gamma}x_2+\ldots)^2-\varepsilon(\varepsilon^\gamma x_1+\varepsilon^{2\gamma}x_2+\ldots)+\varepsilon^2=0.$$

Главными могут быть только два члена из трех: $\varepsilon^{5\gamma}x_1^5$, $-\varepsilon^{1+\gamma}x_1$ и ε^2. Остальные члены заведомо меньше этих. Поэтому возможны два варианта:

1) $\gamma=1$. Тогда $-\varepsilon^{1+\gamma}x_1+\varepsilon=0$, $\varepsilon^{1+2\gamma}x_1^2-\varepsilon^{1+2\gamma}x_2=0$. Разложение имеет вид: $x^{(1)}=\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots$

2) $\gamma=1/4$. Тогда $\varepsilon^{5\gamma}x_1^5-\varepsilon^{1+\gamma}x_1=0$, $5\varepsilon^{6\gamma}x_1^4x_2+\varepsilon^{1+2\gamma}x_1^2-\varepsilon^{1+2\gamma}x_2=0$. Разложение имеет вид: $x=\varepsilon^{1/4}x_1-\frac{1}{4}\varepsilon^{1/2}x_1^2$. Здесь имеется 4 возможности, так как $x_1^4=1$.

Пример 4. Такую же подстановку, как в предыдущем примере, сделаем в уравнении $x^5+\varepsilon x^2+\varepsilon^2x^2-\varepsilon^2=0$. Тогда получим:

$$(\varepsilon^\gamma x_1+\varepsilon^{2\gamma}x_2+\ldots)^5+\varepsilon(\varepsilon^\gamma x_1+\varepsilon^{2\gamma}x_2+\ldots)^2+\varepsilon^2(\varepsilon^\gamma x_1+\varepsilon^{2\gamma}x_2+\ldots)-\varepsilon^2=0.$$

Главные члены следует искать среди следующих трех: $\varepsilon^{5\gamma}x_1^5$, $\varepsilon^{1+2\gamma}x_1^2$, $-\varepsilon^2$.

Возможны два варианта:

1) $\gamma=1/2$. Тогда $\varepsilon^{1+2\gamma}x_1^2-\varepsilon^2=0$, $5\varepsilon^{5\gamma}x_1^5+2\varepsilon^{1+3\gamma}x_1x_2-1=0$. Разложения для двух первых корней различаются знаками первого члена: $x=\pm\varepsilon^{1/2}-\varepsilon+\ldots$

2) $\gamma=1/3$. Тогда $\varepsilon^{5\gamma}x_1^5+\varepsilon^{1+2\gamma}x_1^2=0$, $5\varepsilon^{6\gamma}x_1^4x_2+2\varepsilon^{1+3\gamma}x_1x_2-1=0$. Три оставшихся корня отличаются друг от друга уже в первом приближении: $x=\varepsilon^{1/3}x-\frac{1}{3}\varepsilon^{2/3}\frac{1}{x_1}+\ldots$, где $x_1^3=-1$.

Пример 5. Рассмотрим уравнение $\varepsilon x^n+P_{n-1}(x)=0$, где $P_{n-1}(x)=a_0x_{n-1}+a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-2}x+a_{n-1}$. Невозмущенное уравнение $P_{n-1}(x)=0$ имеет $n-1$ корней $x=x_0$. Для уточнения этих корней положим: $x=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2x_2+\ldots$ Как обычно, подставляя это разложение в исходное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, определим последовательно x_1, x_2 и т. д. Так, $x_1\frac{dP_{n-1}(x)}{dx}=$

$= -x_0^n$. Если $\dfrac{dP_{n-1}(x)}{dx} = 0$, что соответствует случаю кратного корня, то следует взять другое разложение, включив в него дробные степени ε, как это уже было сделано в примере 1.

Последний оставшийся корень стремится к бесконечности при $\varepsilon \to 0$, поэтому представим его в виде $x = \frac{1}{\varepsilon} y_0 + y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^2 y_3 + \ldots$ Величины y_0, y_1 и др. находятся в результате обычной процедуры — подстановки разложения в исходное уравнение и приравнивания нулю суммы коэффициентов при одинаковых степенях ε: $y_0 = -a_0$, $y_1 = -\dfrac{1}{n-2}\dfrac{a_1}{a_0}$.

D.6. Трансцендентные уравнения

Функция, не являющаяся алгебраической, называется трансцендентной (от латинского слова *transcendentis* — выходящий за пределы), а уравнение, содержащее трансцендентные функции от неизвестного, называется трансцендентным.

Разумеется, общей теории решения трансцендентных уравнений не существует в силу их неисчерпаемого многообразия. Поэтому продолжим рассмотрение примеров.

Пример 1. Левая часть уравнения $x + \operatorname{th} x = a$, где a — константа, является строго возрастающей функцией x. Следовательно, для каждого значения a уравнение имеет один и только один действительный корень. Каково асимптотическое поведение корня при $a \to \infty$? Так как $|\operatorname{th} x| < 1$, перенесем $\operatorname{th} x$ в правую часть уравнения, рассматривая его как малую поправку к решению: $x = a - \operatorname{th} x$. При $a \to \infty$ в первом приближении получим: $x = a + O(1)$.

Чтобы добыть последующие приближения, представим $\operatorname{th} x$ в виде ряда по степеням e^{-2x}: $\operatorname{th} x = 1 - 2e^{-2x} + 2e^{-4x} - 2e^{-6x} + \ldots$ Тогда во втором приближении находим: $x = a - 1 + O(e^{-2x})$. Чтобы получить третье приближение, выразим x в правой части через a: $x = a - 1 + 2e^{-2x} + O(e^{-4x}) = a - 1 + 2\exp[-2a + 2 + O(e^{-2a})] + O(e^{-4x}) = a - 1 + 2e^{-2a+2} + O(e^{-4a})$.

Таким образом, мы построили следующий итерационный процесс: в зависящей от x поправке к решению выбирается значение x, соответствующее данному приближению. Продолжение этого процесса приводит к асимптотической последовательности с ошибкой, убывающей на каждом шагу вычислений. Так, при $a = 5$ в первом приближении $x = 5$, во втором приближении $x = 4$, в третьем приближении $x = 4.0006709$, в то время как точное значение x равно 4.0006698.

Пример 2. Тот же самый итерационный процесс используется при отыскании больших положительных корней уравнения $x\operatorname{tg} x = 1$. Разрешая уравнение $\operatorname{tg} x = \frac{1}{x}$, получим: $x = n\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, где n — целое число, а арктангенс принимает главное значение. Воспользовавшись разложением: $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \ldots$, последовательно находим: $x = n\pi + \frac{1}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Пример 3. Итерационный процесс применим даже в том случае, когда зависящая от x поправка неограниченно возрастает при $x \to \infty$. Рассмотрим уравнение $x^2 - \ln x = a$ при больших значениях a, или, что все равно, x. Здесь в качестве поправки можно выбрать $\ln x$: $x^2 = a + O(\ln x) = a + \frac{1}{2}\ln a + o(1)$, $x = \sqrt{a}\left[1 + \frac{1}{4a}\ln a + o\left(\frac{1}{a}\right)\right]$.

Пример 4. Уравнение $xe^x = a$ при $a \to \infty$ имеет единственное положительное решение, так как его левая часть является возрастающей функцией x. Поправкой к итерационному процессу снова будет $\ln x$:

$$x = \ln a - \ln x. \tag{D.20}$$

В первом приближении имеем: $x = \ln a + O(\ln\ln a)$. Логарифмируя (D.20), находим, что $\ln x = \ln(\ln a - \ln x) = \ln\ln a + \ln\left(1 - \frac{\ln x}{\ln a}\right) = \ln\ln a + O\left(\frac{\ln\ln a}{\ln a}\right)$. Во втором приближении $x = \ln a - \ln\ln a + O\left(\frac{\ln\ln a}{\ln a}\right)$.

D.7. Метод сращивания асимптотических разложений

Вопроса о неравномерной пригодности асимптотических разложений типа $x = x(\varepsilon)$, с которыми мы до сих пор имели дело, не возникает, так как здесь нет независимой переменной. Задача построения равномерно пригодных разложений вида $f = f(x;\varepsilon)$ требует разработки специальных математических методов. Их разработано столь много, что у математиков возник повод для шутки: «Сколько задач, столько и методов возмущений».

Тем не менее выделим три метода: метод сращивания асимптотических разложений, метод многих масштабов, метод деформированных координат — и рассмотрим их по порядку. Пусть

$$f(x;\varepsilon) = 1 + x - \varepsilon - e^{-x/\sin^2\varepsilon}, \quad x \geqslant 0, \quad \varepsilon \geqslant 0. \tag{D.21}$$

При устремлении ε к нулю функция f стягивается к ломанной, состоящей из отрезков двух прямых: $x = 0$, $0 \leqslant f \leqslant 1$ и $x > 0$, $f = x + 1$. Именно поэтому значение двойного предельного перехода зависит от порядка, в котором он проводится: $\lim\limits_{x\to 0} f(x;\varepsilon) = -\varepsilon$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(x;\varepsilon) = 1 + x$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x;\varepsilon) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(x;\varepsilon) = 1$.

Если вам подадут шампанское в ведре с дыркой диаметром ε, то шанс выпить его по истечении времени t представится в случае, когда $\varepsilon \to 0$ и лишь затем $t \to \infty$. В случае когда $t \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, шампанского в ведре не останется.

При разложении функции (D.21) в степенной асимптотический ряд по параметру ε экспоненциальный член исчезает:

$$f^0(x;\varepsilon) = 1 + x - \varepsilon. \tag{D.22}$$

Такое разложение непригодно при малых значениях x, когда экспоненциальный член становится порядка единицы: $e^{-x/\sin^2\varepsilon} = O(1)$, то есть в области

$$x = O(\sin^2\varepsilon). \tag{D.23}$$

Такие участки, где непригодно основное асимптотическое разложение, мы будем называть *пограничными слоями*. Из оценки (D.23) видно, что по мере уменьшения величины ε пограничный слой становится все более тонким.

Главная идея метода сращиваемых асимптотик заключается в использовании вместо единого разложения, справедливого во всей области, двух, а в общем случае — нескольких разложений, каждое из которых пригодно в своей области существования. Разложение, справедливое во всей области изменения x, кроме пограничных слоев, называется *внешним*. Разложения, справедливые в масштабе пограничных слоев, называются *внутренними*.

Разложение (D.22) функции (D.21) внешнее; верхний индекс 0 означает начальную букву английского слова outer — внешний. Для построения внутреннего разложения необходимо правильно оценить масштаб пограничного слоя и ввести *внутреннюю координату*, зависимость от которой существенна. С этой целью проводится растяжение пограничного слоя. В соответствии с оценкой (D.23) в качестве такой растянутой переменной можно выбрать $X = x/\sin^2\varepsilon$.

Функция $f(x;\varepsilon)$ во внутренних переменных примет вид:

$$f(x;\varepsilon) = 1 + X\sin^2\varepsilon - \varepsilon - e^{-X}.$$

Разложение этой функции при $\varepsilon \to 0$ и фиксированном значении X, то есть при $X = O(1)$, и является внутренним асимптотическим разложением:

$$f^i(X;\varepsilon) = 1 - e^{-X} - \varepsilon + \varepsilon^2 X + O(\varepsilon^3). \qquad \text{(D.24)}$$

Верхний индекс i — начальная буква английского слова inner — внутренний.

Таким образом, внешнее асимптотическое разложение (D.22), построенное при фиксированном значении x, справедливо во всей области, кроме пограничного слоя, а внутреннее асимптотическое разложение (D.24), построенное при фиксированном значении x, справедливо лишь в пограничном слое. Оба разложения аппроксимируют решение во всей области существования решения $x \geqslant 0$, если области их применимости перекрываются. Проверим этот факт для разложений (D.22) и (D.24). Выберем промежуточную область перекрытия решений такой, чтобы переменная $\eta = x/\varepsilon$ была фиксирована. Разложение в этой области называют *промежуточным*. В скобках заметим, что в качестве промежуточной можно выбрать любую переменную $\eta = x/\varepsilon^\nu$, где $0 < \nu < 2$.

Разложение (D.22) в промежуточной области равно: $f^0(x;\eta) = 1 + \varepsilon(\eta - 1)$. Разложение (D.24) в промежуточной области $\eta = X\frac{\sin^2\varepsilon}{\varepsilon}$ имеет вид:

$$f^i(\eta;\varepsilon) = 1 - e^{-\varepsilon\eta/\sin^2\varepsilon} - \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{\sin^2\varepsilon}X + O(\varepsilon^2) = 1 + \varepsilon(\eta - 1) + O(\varepsilon^2).$$

Видно, что в промежуточной области внешнее и внутреннее разложения совпадают. Следовательно, области пригодности обоих разложений перекрываются.

Полученный результат можно трактовать следующим образом. Во внешнем разложении мы потребовали, чтобы переменная $x = \varepsilon\eta$ стремилась к нулю, так как $\varepsilon \to 0$, $\eta = O(1)$. Во внутреннем разложении мы потребовали, чтобы переменная $X = \dfrac{\varepsilon\eta}{\sin^2\varepsilon}$ стремилась к бесконечности, так как $\varepsilon \to 0$, $\eta = O(1)$. Полученные таким образом разложения оказались одинаковыми, то есть

$$\lim_{x\to 0} f^0(x;\varepsilon) = \lim_{X\to\infty} f^i(X;\varepsilon). \qquad \text{(D.25)}$$

Это правило называется *принципом сращивания* и обеспечивает асимптотическое соответствие двух различных разложений для одной и той же функции. Для функции (D.21) этот предел равен $1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2)$.

Эквивалентная формулировка получается, если в (D.25) заменить внешние переменные не внутренние, а внутренние — на внешние:

$$\lim_{\substack{X \text{ фиксировано} \\ \varepsilon \to 0}} f^0(X \sin^2 \varepsilon; \varepsilon) = \lim_{\substack{x \text{ фиксировано} \\ \varepsilon \to 0}} f^i\left(\frac{x}{\sin^2 \varepsilon}; \varepsilon\right).$$

Принцип сращивания можно выразить следующим каламбуром:

внутреннее разложение внешнего разложения равно внешнему разложению внутреннего разложения, то есть $(f^0)^i = (f^i)^0$.

Метод сращивания асимптотических разложений эффективен, когда имеется, по меньшей мере, два различных по порядку величины масштаба длины, определяющих две характерные области: внешнюю и внутреннюю, в каждой из которых справедливо свое асимптотическое разложение. Представьте себе, что у вас имеется фотография (внешняя область) с неясной, но важной деталью, которая, ввиду малых размеров, выглядит на снимке особой точкой (внутренняя область). Если рассмотреть эту точку отдельно с помощью лупы, то есть при многократном увеличении (растяжении координат), то где-то на ее периферии вы заметите те же подробности, которые едва различались в окрестности особой точки на неувеличенном фотоснимке.

Не всякое разложение в подобласти сращивается с внешним. Для иллюстрации этого факта рассмотрим так называемое *внутренне-внутреннее разложение*, получаемое при фиксированном значении переменной $\varsigma = x/\varepsilon^3$ (в общем случае $\varsigma = x/\varepsilon^\nu$, где $\nu > 2$) из (D.21):

$$f^{ii}(\varsigma; \varepsilon) = 1 + \varepsilon^3\varsigma - \varepsilon - \exp\left(-\frac{\varepsilon^3\varsigma}{\sin^2 \varsigma}\right) = 1 - \varepsilon - \left(1 - \frac{\varepsilon^3\varsigma}{\sin^2 \varsigma}\right) + O(\varepsilon^2) = \\ = \varepsilon(\varsigma - 1) + O(\varepsilon^2).$$

Это разложение сращивается с внутренним разложением (D.24), ибо

$$f^i\left(\frac{\varepsilon^3\varsigma}{\sin^2 \varepsilon}; \varepsilon\right) = 1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon^3\varsigma}{\sin^2 \varepsilon}\right) - \varepsilon + \frac{\varepsilon^5\varsigma}{\sin^2 \varepsilon} + O(\varepsilon^3) = \varepsilon(\varsigma - 1) + O(\varepsilon^2).$$

Однако с внешним разложением (D.22) внутренне-внутреннее разложение не сращивается, так как $f^0(\varepsilon^3\varsigma; \varepsilon) = 1 + \varepsilon^3\varsigma - \varepsilon = 1 - \varepsilon + O(\varepsilon^3)$. Область применимости внешнего и внутренне-внутреннего разложений не перекрывается.

Поскольку функции f^0 и f^i имеют общий предел, сразу же возникает идея просуммировать их и вычесть их общий предел. Полученное разложение $f^c(x;\varepsilon) = f^0(x;\varepsilon) + f^i(x;\varepsilon) - (f^0)^i$ равномерно пригодно во всей области изменения x, так как во внешней области, в силу принципа сращивания, имеем:

$$(f^c)^0 = (f^0)^0 + (f^i)^0 - \left[(f^0)^i\right]^i = f^0 + (f^i)^0 - (f^0)^i = f^0,$$

а во внутренней области по тем же причинам —

$$(f^c)^i = (f^0)^i + (f^i)^i - \left[(f^0)^i\right]^i = (f^0)^i + f^i - (f^0)^i = f^i.$$

Такое разложение называется *составным*. Оно представляет собой внешнее разложение во внешней области и внутреннее разложение во внутренней области.

Для функции (D.21) имеем:

$$f^c(x,\varepsilon) = (1+x-\varepsilon)+(1+e^{-X}-\varepsilon)+(1-\varepsilon) = 1+x-\varepsilon-e^{-x/\sin^2\varepsilon}. \quad \text{(D.26)}$$

Оказалось, что $f^c \equiv f$. Такое совпадение знаменательно, хотя и случайно.

Составное разложение (D.26) уже не является асимптотическим в обычном смысле этого слова. Поэтому производить над ним действия (приравнивать члены одинаковых степеней и т. д.) нужно осторожно. Кроме того, рассмотренный способ построения составного разложения, конечно, не является единственным.

D.8. Метод многих масштабов

Составное разложение, являющееся суммой двух асимптотических разложений, будет асимптотическим, если наряду с x считать независимой переменной и X. Следовательно, можно построить единое асимптотическое разложение, равномерно пригодное всюду, введя вместо одной переменной x две независимые переменные: x и X. Тогда функция (D.21) $f(x,X;\varepsilon) = 1+x-\varepsilon+e^{-X}$ станет равномерно пригодным асимптотическим разложением.

В этом и заключается суть метода многих масштабов: переход от одного масштаба к двум или более с целью получения равномерно пригодного асимптотического разложения. Число независимых переменных может зависеть от числа членов асимптотического разложения. Чтобы

убедиться в этом, рассмотрим степенное асимптотическое разложение функции:

$$f(x;\varepsilon) = e^{-x}\frac{\cos(x\sqrt{1-\varepsilon^2})}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \tag{D.27}$$

Для его построения следует разложить в ряд Маклорена входящие сюда экспоненту и косинус. Для экспоненты имеем:

$$e^{-\varepsilon x} = 1 - \varepsilon x + \frac{1}{2!}(\varepsilon x)^2 + O(\varepsilon)^3. \tag{D.28}$$

Прежде чем раскладывать косинус, воспользуемся рядом для входящего в него корня: $\sqrt{1-\varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{8}\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6)$. Тогда $\cos(x\sqrt{1-\varepsilon^2}) = \cos\left[x\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{8}\varepsilon^4 + \ldots\right)\right] = \cos x\cos\left(\frac{1}{2}\varepsilon^2 x + \frac{1}{8}\varepsilon^4 x + \ldots\right) + \sin x\sin\left(\frac{1}{2}\varepsilon^2 x + \frac{1}{8}\varepsilon^4 x + \ldots\right)$, $\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{3}{8}\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6)$. Поскольку

$$\cos\delta = 1 - \frac{1}{2!}\delta^2 + \frac{1}{4!}\delta^4 + \ldots, \quad \sin\delta = \delta - \frac{1}{3!}\delta^3 + \frac{1}{5!}\delta^5 + \ldots, \tag{D.29}$$

то

$$\cos(x\sqrt{1-\varepsilon^2}) = \cos x\left[1 + O(\varepsilon^4)\right] + \sin x\left[\frac{1}{2}\varepsilon^2 x + O(\varepsilon^4)\right] =$$
$$= \cos x + \frac{1}{2}\varepsilon^2 x\sin x + O(\varepsilon^4). \tag{D.30}$$

Подставляя разложения косинуса и экспоненты в (D.27), находим:

$$f(x;\varepsilon) = \left[1 - \varepsilon x + \frac{1}{2!}\varepsilon^2 x^2 + O(\varepsilon^3)\right] \times$$
$$\times \left[\cos x + \frac{1}{2}\varepsilon^2 x\sin x + O(\varepsilon^4)\right]\left[1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)\right] =$$
$$= \cos x - \varepsilon x\cos x + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left[\cos x + x(x\cos x + \sin x)\right] + O(\varepsilon^3). \tag{D.31}$$

Прямое разложение функции f в степенной ряд по ε несправедливо при $x = O(\varepsilon^{-1})$. Несостоятельность прямого разложения, то есть появление вековых членов, обусловлена несостоятельностью разложений (D.28)

и (D.30). Разложение экспоненты (D.28) можно аппроксимировать конечным числом членов ряда только при условии, что εx мало, например, при $x = O(1)$. Когда $x = O(1/\varepsilon)$, εx уже не мало, и усеченный ряд оказывается непригодным. Функцию $e^{-\delta}$ нельзя равномерно аппроксимировать конечной суммой членов ряда $\sum\limits_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}(-\delta)^n$. Усеченный ряд дает хорошее приближение функции только до некоторого значения δ_N, после которого $e^{-\delta}$ может отличаться от суммы N членов ряда на любую наперед заданную величину. Если взять сумму $N+1$ члена, то допустимое значение δ_N увеличится до некоторого нового значения $\delta_{N+1} > \delta_N$, в пределах которого новый усеченный ряд будет пригодным с выбранной нами точностью. Однако при $\delta > \delta_{N+1}$ различие между функцией и усеченным рядом вновь превысит выбранную погрешность. Во избежание этого ряд $e^{-\varepsilon x}$ должен содержать бесконечное число членов. С этой целью можно не разлагать экспоненту в ряд, так ее и оставить, заменив εx новой переменной X_1. Функция $e^{-X_1} = e^{-\varepsilon x}$ конечна при любых значениях X_1: $0 \leqslant X_1 \leqslant \infty$, а значит, и при любых значениях x: $0 \leqslant x \leqslant \infty$.

Точно так же усеченное разложение (D.30) несправедливо при $x = O(\varepsilon^{-2})$. Функцию $\cos\delta$ нельзя равномерно приблизить усеченным рядом (D.29). Для получения асимптотического разложения $\cos(x\sqrt{1-\varepsilon^2})$, справедливого при $x = O(\varepsilon^{-2})$, комбинацию $\varepsilon^2 x$ следует считать новой фиксированной переменной $X_2 = O(1)$. Тогда разложение

$$\cos(x\sqrt{1-\varepsilon^2}) = \cos\left[x - \frac{1}{2}X_2 - \frac{1}{8}\varepsilon^4 x + O(\varepsilon^6 x)\right] =$$

$$= \cos\left(x - \frac{1}{2}X_2\right) + \frac{1}{8}\varepsilon^4 x \sin\left(x - \frac{1}{2}X_2\right) + O(\varepsilon^6 x) \quad \text{(D.32)}$$

справедливо в области, где $x = O(\varepsilon^{-2})$. Однако при $x = O(\varepsilon^{-4})$ оно становится непригодным, ибо второй член уже не мал по сравнению с первым. Чтобы получить разложение, справедливое для $x = O(\varepsilon^{-4})$, следует ввести еще одну фиксированную переменную $X_4 = \varepsilon^4 x = O(1)$. Такой процесс введения новых масштабов может быть продолжен неограниченно.

В рамках прямого разложения (D.31) частота колебаний равна единице в отличие от истинного значения $\sqrt{1-\varepsilon^2}$. В соответствии с методом многих масштабов частота колебаний на каждом шагу определяется как усеченный ряд функции $\sqrt{1-\varepsilon^2}$: $\omega_0 = 1$, $\omega_2 = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2$ и т. д.

Таким образом, метод многих масштабов применим для определения функции $f(x;\varepsilon)$, которая явно зависит от $x, \varepsilon x, \varepsilon^2 x, \ldots$ Для получения асимптотического разложения, справедливого вплоть до значений $x = O(\varepsilon^{-N})$, где N — целое положительное число, следует считать функцию $f(x;\varepsilon)$ зависимой от $N+1$ переменной разного масштаба: $x, X_1, X_2, \ldots, X_N$, где $X_n = \varepsilon^n x$, $n = 1, 2, \ldots, N$.

Координаты X_n удобно трактовать как разные временные масштабы исходной задачи. Масштаб времени X_1 соответствует более медленному времени, чем масштаб x, а X_2 соответствует более медленному времени, чем масштаб X_1. В общем случае время X_n медленнее, чем время X_{n-1}. Например, если $\varepsilon = 1/60$, то масштаб x можно характеризовать движением секундной стрелки часов, масштаб X_1 — минутной, а масштаб X_2 — часовой. В общем случае имеем: $f(x;\varepsilon) = F(x, X_1, X_2, \ldots, X_N; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n a_n(x, X_1, X_2, \ldots, X_N) + O(\varepsilon X_N)$.

Остаточный член, записанный в форме $O(\varepsilon X_N)$, свидетельствует, что разложение справедливо вплоть до значений $x = O(\varepsilon^{-N})$. Чтобы получить разложение, пригодное при больших значениях x, следует ввести дополнительные масштабы.

Теперь внимательно посмотрим на функцию (D.27), для которой мы построили как прямое асимптотическое разложение, так и асимптотическое разложение, использующее бесконечный набор переменных разного масштаба. Так ли необходим этот бесконечный набор масштабов? Конечно, нет. В выражении (D.27) переменная x фигурирует в двух комбинациях: εx и $\sqrt{1-\varepsilon^2}x$. Следовательно, можно ограничиться двумя масштабами: $X_1 = \varepsilon x$, $X_2 = x\sqrt{1-\varepsilon^2} = x\left[1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{8}\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6)\right]$. Тогда разложение функции (D.27) принимает особенно простой вид:

$$f(x;\varepsilon) = e^{-X_1} \cos\left[X_2\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{3}{8}\varepsilon^4\right)\right] + O(\varepsilon^6).$$

В общем случае двухмасштабное асимптотическое разложение произвольной функции $F(x;\varepsilon)$ представимо в виде ряда:

$$F(x;\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon^n a_n(X_1, X_2) + O(\varepsilon^N).$$

В качестве упражнения рассмотрим уравнение:

$$f = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} e^{\varepsilon x} \sin(x e^{\varepsilon} - f), \quad x > 0, \quad \varepsilon > 0. \tag{D.33}$$

Для его решения достаточно ввести две переменные: $X_1 = \varepsilon x$ и $X_2 = e^{\varepsilon} x$. Асимптотическое разложение уравнения $f = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} e^{-X_1} \sin(X_2 - f)$ содержит только четные степени ε:

$$f(x;\varepsilon) = a_0(X_1, X_2) + \varepsilon^2 a_2(X_1, X_2) + O(\varepsilon^4). \qquad \text{(D.34)}$$

Сравнив (D.33) и (D.34), получим:

$$a_0 + \varepsilon^2 a_2 = e^{-X_1}\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\right)\sin(X_2 - a_0 - \varepsilon^2 a_2) + O(\varepsilon^4) =$$

$$= e^{-X_1}\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)\left[\sin(X_2 - a_0)\cos(\varepsilon^2 a_2) - \cos(X_2 - a_0)\sin(\varepsilon^2 a_2)\right] + O(\varepsilon^4) =$$

$$= e^{-X_1}\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\right)\left[\sin(X_2 - a_0) - \varepsilon^2 a_2 \cos(X_2 - a_0)\right] + O(\varepsilon^4) =$$

$$= e^{-X_1}\left\{\sin(X_2 - a_0) + \varepsilon^2\left[\frac{1}{2}\sin(X_2 - a_0) - a_2\cos(X_2 - a_0)\right]\right\} + O(\varepsilon^4).$$

Приравнивая нулю члены порядка $O(1)$ и $O(\varepsilon^2)$, находим:

$$a_0 = e^{-X_1}\sin(X_2 - a_0), \quad a_2 = \frac{1}{2}\frac{a_0}{1 + e^{-X_1}\cos(X_2 - a_0)}.$$

D.9. Метод деформированных координат

Идея метода деформированных координат восходит к выдающемуся французскому математику Анри Пуанкаре (1854–1912). Для получения равномерно пригодного асимптотического разложения он слегка изменил координату x, тоже разложив ее в асимптотический ряд. Таким образом, наряду с рядом для независимой переменной

$$f(x;\varepsilon) = f_0(s) + \varepsilon f_1(s) + \varepsilon^2 f(s) + \ldots \qquad \text{(D.35)}$$

строился ряд для координаты

$$x(s;\varepsilon) = s + \varepsilon x_1(s) + \varepsilon^2 x_2(s) + \ldots, \qquad \text{(D.36)}$$

где s — новая координата, заменяющая x. Функции $x_n(s)$, определяющие деформацию координаты x, заранее неизвестны и находятся последовательно в процессе решения задачи.

Неоднородность прямого асимптотического разложения

$$f(x;\varepsilon) = a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2 a(x) + \ldots, \tag{D.37}$$

то есть особенность функций a_1, a_2 и т.д., устраняется с помощью так называемого *принципа Лайтхилла*:

> *приближения высших порядков a_1, a_2, ... имеют не бóльшую особенность, чем начальное приближение a_0.*

Принцип Лайтхилла не определяет функции $x_n(s)$ единственным образом. Но это скорее достоинство метода, чем его недостаток, — появившийся произвол исследователь может использовать по своему усмотрению. Естественным дополнением к принципу Лайтхилла является принцип максимальной простоты выражений для x_n. Оба разложения (D.35) и (D.36) можно трактовать как неявную форму решения задачи с параметром s. Поскольку первое приближение $f(x;\varepsilon) = f_0(s)$, $x(s;\varepsilon) = s + \varepsilon x_1(s)$ уже делает решение равномерно пригодным, обычно им и ограничиваются.

Пусть требуется найти корень квадратного уравнения:

$$\varepsilon f^2 + 2xf - 2(1+x) - 4\varepsilon = 0, \tag{D.38}$$

который ограничен при $\varepsilon \to 0$, $x > 0$. Используя прямое разложение (D.37), получим:

$$\varepsilon(a_0+\varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \ldots)^2 + 2x(a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \ldots) - 2(1+x) - 4\varepsilon = 0.$$

Собирая члены с одинаковыми степенями ε и приравнивая их сумму нулю, находим:

$$2a_0x - 2(1+x) = 0, \quad a_0^2 + 2a_1x - 4 = 0, \quad 2a_0a_1 + 2a_2x = 0, \quad \ldots$$

Коэффициенты a_n определяются из этой системы последовательно друг за другом: $a_0 = \dfrac{1+x}{x}$, $a_1 = \dfrac{(x-1)(1+3x)}{2x^3}$, $a_2 = \dfrac{(1-x^2)(1+3x)}{2x^5}$, ... Таким образом, в прямом асимптотическом разложении функции

$$f(x;\varepsilon) = \frac{1+x}{x} + \varepsilon\frac{(x-1)(1+3x)}{2x^3} + \varepsilon^2\frac{(1-x^2)(1+3x)}{2x^5} + \ldots \tag{D.39}$$

особенность в точке $x = 0$ вместо того, чтобы исправляться, катастрофически возрастает от члена к члену. Разложение непригодно вблизи точки $x = 0$.

Метод деформированных координат сдвигает особенность за пределы интервала изменения x. Подставим ряды (D.35) и (D.36) в уравнение (D.38):

$$\varepsilon(f_0+\varepsilon f_1+\dots)^2+2(s+\varepsilon x_1+\dots)(f_0+\varepsilon f_1+\dots)- \\ -2(1+s+\varepsilon x_1+\dots)-4\varepsilon=0.$$

Снова зануляя коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим:

$$f_0=\frac{1+s}{s},$$
$$f_0^2+2x_1f_0+2sf_1-2x_1-4=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Второе уравнение запишем в виде: $f_1=\dfrac{3}{2s}-\left(\dfrac{x_1}{s^2}+\dfrac{1+2s}{2s^3}\right)$. В соответствии с принципом Лайтхилла выражение в скобках должно быть порядка $O(1/s)$ и не выше, то есть

$$\frac{x_1}{s^2}+\frac{1+2s}{2s^3}=\frac{c}{s}, \tag{D.40}$$

хотя вместо постоянной c можно взять произвольную функцию, разложимую в ряд Маклорена: $c_0+c_1s+c_2s^2+\dots$ В этом и проявляется неединственность выбора деформации координаты x. Наиболее простой выбор: $c=0$, $x_1=-(1+2s)/2s$. Тогда имеем:

$$f(x;\varepsilon)\approx\frac{1+s}{s},\quad x\approx s-\varepsilon\frac{1+2s}{2s}. \tag{D.41}$$

Если исключить отсюда параметр $s\approx\dfrac{x+\varepsilon}{2}+\sqrt{\dfrac{(x+\varepsilon)^2}{4}+\dfrac{\varepsilon}{2}}$, то первое приближение окажется явно зависимым от x: $f(x;\varepsilon)\approx\sqrt{\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)^2+2\dfrac{1+x}{\varepsilon}+1}-\dfrac{x}{\varepsilon}$. При $x=0$ получаем: $f(0;\varepsilon)\approx\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}+1}\approx\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}$, что согласуется в главном приближении с точным решением уравнения (D.38).

Если в условии (D.40) положить $c=3/2$, то есть сделать деформацию x равной нулю при $s=1$, то равномерно пригодное первое приближение

$$f(x;\varepsilon)=\frac{1+s}{s},\quad x=s+\varepsilon\frac{3s^2-1-2s}{2s} \tag{D.42}$$

оказывается точным решением уравнения (D.38), так что полученные ряды дальше не продолжаются: $f_1 = f_2 = \ldots = 0$, $x_2 = x_3 = \ldots = 0$.

Действительно, исключая S из системы (D.42), находим: $f(x;\varepsilon) = \sqrt{\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 + 2\frac{1+x}{\varepsilon} + 4} - \frac{x}{\varepsilon}$.

Можно ли определять деформацию из разложения (D.39), то есть исправлять прямое разложение непосредственно, не обращаясь к изначальному уравнению (D.38)? Разумеется, можно. Ограничившись двумя членами разложения (D.39), подставим сюда $x = s + \varepsilon x_1$:

$$f(x;\varepsilon) = \frac{1+s+\varepsilon x_1}{s+\varepsilon x_1} + \varepsilon\frac{(s-1)(1+3s)}{2s^3} + O(\varepsilon^2) =$$

$$= \frac{1+s+\varepsilon x_1}{s}\left(1 - \varepsilon\frac{x_1}{s}\right) + \varepsilon\frac{(s-1)(1+3s)}{2s^3} + O(\varepsilon^2) =$$

$$= \frac{1+s}{s} + \varepsilon\left[\frac{(s-1)(1+3s)}{2s^3} - \frac{x_1}{s^2}\right] + O(\varepsilon^2).$$

В соответствии с принципом Лайтхилла $\frac{(s-1)(1+3s)}{2s^3} - \frac{x_1}{s^2} = \frac{c_1}{s}$. Искомое приближение (D.41) получается при $c_1 = 3/2$.

Рассмотрим еще один пример. Пусть

$$[\varepsilon + (1-\varepsilon)x]\, f(x;\varepsilon) = x, \quad x > 0. \tag{D.43}$$

Прямое разложение

$$f(x;\varepsilon) = \frac{1}{1+\varepsilon\frac{1-x}{x}} = 1 - \varepsilon\frac{1-x}{x} + \varepsilon^2\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 + O(\varepsilon^3) \tag{D.44}$$

непригодно в точке $x = 0$.

Подставим (D.35) и (D.36) в (D.43), ограничившись тремя членами:

$$(f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2)[\varepsilon + (1-\varepsilon)(s + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2)] = s + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + O(\varepsilon^3).$$

Собирая, как обычно, члены одинакового достоинства и приравнивая их к нулю, получим бесконечную систему уравнений:

$$f_0 s = s,$$
$$f_1 s + f_0(1 - s + x_1) = x_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Подставляя найденное из первого уравнения значение $f_0 = 1$ во второе уравнение, убеждаемся, что величина x_1 из него исчезает. Как ее определить? В таких случаях важно не растеряться и продолжить вычисления. Третье уравнение из бесконечной системы: $f_2 s + (x_2 - x_1) f_0 + f_1(1 - s + x_1) = x_2$ — имеет решение: $f_2 = \dfrac{x_1 + (s-1)^2}{s^2}$, так как $f_1 = \dfrac{s-1}{s}$. Теперь можно выбрать x_1, используя принцип Лайтхилла. Например, положить $x_1 = -(s-1)^2$.

Таким образом, в рассмотренном примере деформация определяется только из третьего приближения.

Часто для получения равномерно пригодного разложения достаточно удачно переписать прямое асимптотическое разложение. Такой способ называется *перенормировкой*. Например, вместо (D.44) можно записать: $f(x;\varepsilon) = \exp\left(-\varepsilon \dfrac{1-x}{x}\right) + O(\varepsilon^2)$. Такое представление не имеет особенности в точке $x = 0$.

Литература

Агеев В. Н.
2002. *Семиотика.* М.: Весь мир.

Александров П. С.
1969. *Проблемы Гильберта.* М.: Наука.

Андерсон Д., **Танненхил** Дж., **Плетчер** Р.
1980. *Вычислительная гидромеханика и теплообмен.* М.: Мир.

Андрианов И. В., **Маневич** Л. И.
1994. *Асимптотология: идеи, методы, результаты.* М.: Аслан.

Андронов А. А., **Фабрикант** А. Л.
1979. *Затухание Ландау, ветровые волны и свисток* // Нелинейные волны / Под ред. А. В. Гапонова-Грехова. М.: Наука. С. 68–104.

Антон Л. (Anton L.)
1939. *Ausbildung eines Wirbels an der Kante einer Platte* // Ing. Arch. 10. S. 411–427.

Аристотель.
1936. *Физика.* М.: Соцэкгиз.

Арнольд В. И.
1997а. *Математические методы классической механики.* М.: Наука.
1997б. *Математика и математическое образование в современном мире* // Матем. образование. № 2. С. 109–112.
2002. *Что такое математика?* М.: МЦНМО. С. 66–67.

Бакингем (Buckingham R.).
1914. *On physically similar systems, illustrations of the use of dimensional equation* // E. Phys. Rev. Vol. 4. P. 345–357.

Баренблатт Г. И.
1982. *Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика.* Л.: Гидрометеоиздат.

Баренблатт Г. И., **Монин** А. С.
1979. *О возможном механизме дискоидных образований в атмосфере* // Докл. АН СССР. Т. 246. № 4. С. 834–837.

Бахметьев Б. А.
1939. *Механика турбулентного потока.* М.: Госстройиздат.

Берс Л.
1961. *Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики.* М.: ИЛ.

Бестужев-Лада Н. В.
1997. *Ретроальтернавистика в философии истории* // Вопр. филос. № 8. С. 112.

2000(ред.). *Впереди XXI век: перспективы, прогнозы, футурологи.* М.: Academia.

Бетяев С. К.
1987. *Обтекание щелевых границ.* М.: ЦАГИ. Труды ЦАГИ, вып. 2356.

1993. *Математические начала моделирования в гидродинамике.* М.: ЦАГИ.

1994. *Математическое моделирование ламинарных течений.* М.: ВИМИ. № ДО 8567.

1995. *Гидродинамика: проблемы и парадоксы* // Усп. физ. наук. Т. 165. № 3. С. 299–330.

1999. *Научный прогноз: сущность и возможности* // Вестн. МУ. Сер. 7, философия. № 2. С. 49–61.

2001. *Как разрезать вихревой шнур?* // МЖГ. № 2. С. 105–111.

2003а. *Прогностика: первые шаги науки* // Вопр. филос. № 4. С. 3–13.

2003б. *Размышления о креационизме* // Вестн. МУ. Сер. 7, философия. № 4. С. 26–41.

2003в. *К истории гидродинамики: научные школы России XX века* // Усп. физ. наук. Т. 173. № 4. С. 419–446.

Бетяев С. К., **Гайфуллин** А. М.
2001. *Спиральные вихри.* М.: ЦАГИ.

Бетяев С. К., **Гайфуллин** А. М., **Гордеев** С. В.
1994. *Точечно-круговой вихрь* // ПММ. Т. 58, вып. 4. С. 167–172.

Биркгоф Г.
1954. *Гидродинамика.* М.: ИЛ.

Биркгоф Г., **Сарантонелло** Э.
1964. *Струи, следы и каверны.* М.: Мир.

Блехман И. И., **Мышкис** А. Д., **Пановко** Я. Г.
1983. *Механика и прикладная математика.* М.: Наука.

Блюменфельд Л. А.
2002. *Решаемые и нерешаемые проблемы биологической физики.* М.: УРСС.

Боголюбов Н. Н., **Митропольский** Ю. А.
1958. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* М.: Физматгиз.

Борисов А. В., **Мамаев** И. С., **Соколовский** М. А.
2003(ред.). *Фундаментальные проблемы теории вихрей.* — М.-Ижевск: ИКИ.

Борисов В. П.
2000. *Дмитрий Павлович Рябушинский* // Природа. №8. С. 61–68.

Браун, **Стюартсон** (Broun S. N., Stewartson K.).
1969. J. Inst. Maths. Applies. Vol. 5. P. 206–216.

Брутян М. А., **Крапивский** П. Л.
1986. *Течение вязкой жидкости над перфорированной границей при малых числах Рейнольдса* // Изв. АН СССР МЖГ. №5. С. 172–175.

Буземан А.
1950. *Осесимметричное коническое сверхзвуковое течение* // Газовая динамика. М.: ИЛ. С. 197–218.

Булах Б. М.
1970. *Нелинейные конические течения газа.* М.: Наука.

Бурбаки Н.
1972. *Архитектура математики* // Архитектура математики. М.: Знание.

Бэтчелор Дж. (G. K. Batchelor).
1955. *Теория однородной турбулентности.* М.: ИЛ.
1964. *Axial flow in trailing line vortices* // Jorn. Fluid Mech. Vol. 20, pt. 4. P. 645–658.
1973. *Введение в динамику жидкости.* М.: Мир.

Бэтчелор, **Моффат**, **Воратер** (G. K. Batchelor, H. K. Moffat, M. G. Worater).
2000. Perspectives in fluid dynamics. A collective introduction to current research. Cambridge: Univ. Press.

Вавилов С. И.
1989. *Исаак Ньютон.* М.: Наука.

Вайнберг С.
1981. *Первые три минуты: современный взгляд на происхождение Вселенной.* М.: Энергоиздат.

Ван-Дайк М.
1967. *Методы возмущений в механике жидкости.* М.: Мир.
1986. *Альбом течений жидкости и газа.* М.: Мир.

Вернадский В. И.
1981. *Избранные труды по истории науки.* М.: Наука.

Вестуотер (Westwater F. L.).
1936. *The rolling un of a surface of a discontinuity behind fn airfoil of finite span* // Aero. Res. Council Rep. and Mem. № 1692. P. 116–131.

Винер Н.
1958. *Кибернетика, или управление и связь в животном и машине.* М.: Тайдекс Ко.

Владимиров Ю. С.
2002. *Метафизика.* М.: Бином.

Гайфуллин А. М., **Зубцов** А. В.
1984. *Асимптотическое решение задачи о течении вязкой жидкости в ядре вихревой пелены* // Учен. зап. ЦАГИ. Т. 15. № 5. С. 19–29.

Галилей Г.
1964. *Избранные труды.* М.: АН СССР.

Гельмгольц (Helmholtz H.).
1858. *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen welche den Wirbel bewegungen entsprechen* // Grelles J. 55.

Гердер И. Г.
1977. *Идеи к философии истории человечества.* М.: Наука.

Гинзбург В. Л.
1985. *О физике и астрофизике.* М.: Наука.

2001а. *О науке, о себе и о других.* М.: Физматлит.

2001б. *Как я стал физиком-теоретиком и вообще о себе...* // УФН. Т. 171. № 10. С. 1137–1148.

Глейк Дж.
2001. *Хаос: создание новой теории.* СПб.: Амфора.

Гнеденко Б. В.
2001. *Очерк по истории теории вероятности.* М.: УРСС.

Годунов С. К.
1959. *Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики* // Матем. сб. Т. 47. С. 271–306.

Голованов Я. К.
1994. *Королев: факты и мифы.* М.: Наука.

Гольдштейн С.
1948. *Заметка об условиях на поверхности соприкосновения жидкости с твердым телом* // Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости / Под ред. С. Гольдштейна. М.: ИЛ. Т. 2. С. 356.

Гольдштик М. А.
1981. *Вихревые потоки.* Новосибирск: Наука.

Грин (Green S. T.).
1995. *Fluid vortices* // Kluwer Acad. Publ.

Гродзовский Г. Л. и др.
1967. *Сверхзвуковые течения газа в перфорированных границах.* М.: Машиностроение.

Громека И. С.
1952. *Собрание сочинений.* М.: АН СССР.

Грэхэм Л. Р.
1998. *Очерки российской и советской науки.* М.: Янус-К.

Гумилёв Л. Н.
1997. *Этногенез и биосфера Земли.* М.: Ин-т ДИДИК.

Гуревич М. И.
1979. *Теория струй идеальной жидкости.* М.: Мир.

Гуцол А. Ф.
1997. *Эффект Ранка* // УФН. Т. 167. №6. С. 665–687.

Данилов Ю. А.
2001. *Лекции по нелинейной динамике.* М.: Постмаркет.

Дариус Дж.
1986. *Недоступное глазу.* М.: Мир.

Де Жен П.-Ж., **Бадос** Ж.
2000. *Хрупкие объекты.* М.: Мир.

Джозеф (Joseph D. D.).
1986. *Historical perspectives on the elasticity of liquids* // Jour. Non-Newtonian Fluid Mech. 19. P. 237–249.

Додд Р.
1988. *Солитоны и нелинейные волновые уравнения.* М.: Мир.

Дойч Д.
2001. *Структура реальности.* М.-Ижевск: РХД.

Дугин А. Г.
2002. *Эволюция парадигмальных оснований науки.* М.: Арктогея-Центр.

Дюгем П.
1910. *Физическая теория, ее цель и строение.* СПб.

Дюрэнд В. Ф.
1939(ред.). *Аэродинамика.* М.-Л.: Гизоборонпром. Т. 3.

Жуковский Н. Е.
1949. *О реакции вытекающей и втекающей жидкости* // Жуковский Н. Е.. Собрание сочинений. М.-Л.: ГИТТЛ. С. 255–268.

Захаров В. Д.
2003. *Тяготение от Аристотеля до Эйнштейна.* М.: Бином.

Зельдович Я. Б., **Райзер** Ю. П.
1966. *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.* М.: Наука.

Зубцов А. В.
1989. *Асимптотическая модель осесимметричного распада вихревой нити в несжимаемой жидкости* // Изв. АН СССР МЖГ. № 6. С. 47–52.

Ивин А. А.
1997. *Логика.* М.: Знание.

Идельчик И. Е.
1982. *Некоторые интересные эффекты и парадоксы в аэродинамике и гидравлике.* М.: Машиностроение.

Каден (Kaden H.).
1931. *Anfwicklung einer unstabilen unstetigkeitsfläche* // Ing. Arch. 2. P. 140–158.

Кадомцев Б. Б.
1988. *Коллективные явления в плазме.* М.: Наука.
1999. *Динамика и информация.* М.: УФН.

Кадомцев Б. Б., **Рыдник** В. И.
1981. *Волны вокруг нас.* М.: Знание.

Касти (Casti J. L.).
2000. *Five more golden rules.* N. Y.: Wiley. P. 77–90.

Кирхгоф (Kirchhoff G. R.).
1876. *Vorlessungen über mathematishe physic.* Teubner, Leipzig. Vol. 1.

Клайн Дж.
1968. *Подобие и приближенные методы.* М.: Мир.

Кобзарев И. Ю., **Манин** Ю. И.
1997. *Элементарные частицы. Диалоги физика и математика.* М.: Фазис.

Козлов В. В.
1998. *Общая теория вихрей.* Ижевск: РХД.

Кокшайский Н. В.
1974. *Очерк биологической аэро- и гидродинамики.* М.: Наука.

Колмогоров А. Н.
1988. *Избранные труды.* Кн. 1. Математика и механика. М.: Наука.

Корсин, **Кистер** (Corrsin S., Kister A. L.).
1955. *The free-stream boundaries of turbulent flows* // NACA Rep. № 1244.

Космодемьянский А. А.
1982. *Очерки по истории механики.* М.: Наука. С. 68–72.

Коул Дж.
1972. *Методы возмущений в прикладной математике.* М.: Мир.

Коул Дж., **Кук** Л.
1989. *Трансзвуковая аэродинамика.* М.: Мир.

Кочин Н. Е., **Кибель** И. А., **Розе** Н. В.
1955. *Теоретическая гидродинамика.* М.: ГИТЛ. Т. 1.

Крайко А. Н.
1979. *Вариационные задачи газовой динамики.* М.: Наука.

Кранк, **Никольсон** (Crank J., Nicolson P.).
1947. *A practical method for numerical evaluations of the heat-conduction type* // Proc. Cambridge Philos. Soc. Vol. 43. № 50. P. 50–67.

Кузнецов Е. А., **Рубан** В. П.
2000. *Коллапс вихревых линий в гидродинамике* // ЖЭТФ. Т. 118, вып. 4(10). С. 893–905.

Кун Т.
2002. *Структура научных революций.* М.: Аст.

Курант, **Фридрихс** (Courant R., Friedrichs K. O., Lewy H.).
1928. *Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik* // Math. Annalen. Bd. 100. S. 32–74.

Кэмпбел, **Зифф** (Campbell K. J., Ziff R. M.).
1979. *Vortex patterns and energies in a rotation superfluid* // Phys. Rev. B. Vol. 20. № 5. P. 1886–1901.

Кюхеман Д.
1983. *Аэродинамическое проектирование самолетов.* М.: Машиностроение.

Лагт (Lugt H.).
1983. *Vortex flow in nature and technology.* N. Y.: John Wiley.

Ладыженская (Ladyzhenskaya O. A.).
1975. *Mathematical analysis of Navier–Stokes equations for incompressible liquids* // Ann. Rev. Fluid Mech. Vol. 7. P. 249–272.
2003. *Шестая проблема тысячелетия* // УМН. Т. 58, вып. 2. С. 45–78.

Лайтхилл М. Дж. (Lighthill M. J.).
1981. *Волны в жидкостях.* М.: Мир.

1986. *The recently recognized failure of predictability in newtonian dynamics* // Proc. Royal Soc. P. 35–50.

1995. *In Twenties Century Physics.* Vol. 1–3 / Eds. L. M. Broun, A. Pais, D. Pippard. N. Y.: Oxford Univ. Press.

Левич В. Г.
1959. *Физико-химическая гидродинамика.* М.: Физматгиз.

Лекторский В. А.
2001. *Эпистемология классическая и неклассическая.* М.: УРСС.

Лем С.
1968. *Сумма технологии.* М.: Мир.

Леонардо **да Винчи**.
1955. *Избранные естественно-научные произведения.* М.: АН СССР.

Леонтьев А. И., **Кавтарадзе** Р. З.
2001. *Выдающийся гидромеханик* // Исследования по физике и механике. М.: Наука. С. 153–179.

Лойцянский Л. Г.
1998. *Из моих воспоминаний. Записки профессора-политехника.* СПб.: Б.С.К.

Лузин А.
1986. *Ещё раз о ложке в струе воды* // Квант. № 10. С. 19–20.

Лэмб Г.
1960. *Динамическая теория звука.* М.: ГИФМЛ.

МакКормак (MacCormak R. W.).
1969. *The effect of viscosity in hypervelosity impact cratering* // AIAA Paper. № 354. Ohie.

Маланин В. В., **Полосков** И. Е.
2001. *Случайные процессы в нелинейных системах.* М.: РХД.

Манкбоди (Mankbadi R. R.).
1994. *Transition, turbulence and noise: theory and applications for scientists and engineers.* London e.a.: Kluwer Publishers.

Маревцева Н. А.
1980. *Обтекание тонкого профиля в канале с проницаемыми стенками* // Изв. АН СССР, МЖГ. № 2. С. 111–117.

Маслов В. П.
1987. *Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений.* М.: Наука.

Массо (Massau I.).
1900–1903. *Mem. sur l'integration graphique des equations aux dérivées partielles.* Gand.

Мах Э.
2000. *Механика. Историко-критический очерк ее развития.* Ижевск: Респ. типогр.
2003. *Познание и заблуждение.* М.: Бином. С. 205, 207.

Метрополис, **Улам** (Metropolis N., Ulam S. M.).
1949. *The Monto Carlo method* // J. Amer. Statist. Assoc. Vol. 44. № 247. P. 335–341.

Миеле А.
1969(ред.). *Теория оптимальных аэродинамических форм.* М.: Мир.

Минайлос А. Н.
2001. *О расчете уравнений с заданной точностью сингулярных членов и дефекте дифференциальных уравнений* // Журн. выч. мат. и мат. физ. Т. 41. № 10. С. 1566–1582.

Монин А. С., **Яглом** А. М.
1992, 1996. *Статистическая гидромеханика.* СПб.: Гидрометеоиздат. Т. 1–2.

Монин А. С., **Полубаринова-Кочина** П. Я., **Хлебников** В. И.
1989. *Космология, гидродинамика, турбулентность: А. А. Фридман и развитие его научного наследия.* М.: Наука.

Муан, **Мехеш** (Moin P., Mahesh K.).
1998. *Direct numerical simulation: a tool in turbulence research* // Ann. Rev. Fluid Mech. Vol. 30. P. 539–578.

Найфэ А.
1984. *Введение в методы возмущений.* М.: Мир.

Незлин М. В., **Снежкин** Е. Н.
1990. *Вихри Россби и спиральные структуры.* М.: Наука.

Нейланд В. Я.
1969. *К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке* // Изв. АН СССР. МЖГ. № 4. С. 53–57.

фон **Нейман**, **Рихтмайер** (Von Neumann J., Richtmyer R. D.).
1950. *A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks* // J. Appl. Phys. Vol. 21. P. 232–257.

Николаева Н. С.
1996. *Япония — Европа. Диалог в искусстве. Середина XVI — начало XX века.* М.: Изобразительное искусство.

Никольский А. А.
1981. *Теоретические исследования по механике жидкости и газа.* Труды ЦАГИ, вып. 2122. М.: ЦАГИ,

Ньютон И.
1989. *Математические начала натуральной философии.* М.: Наука.

Ньюэлл А.
1989. *Солитоны в математике и физике.* М.: Мир.

Овсянников Л. В.
1956. *Общее решение уравнений ренормализационной группы* // ДАН СССР. Т. 109. № 6. С. 1112–1115.

1978. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука.

Окитани, **Кишиба** (Ohkitani K., Kishiba S.).
1995. *Nonlokal nature of vortex stretching in an inviscid fluid* // Phys. Fluids. V. 7. № 2. P. 411–421.

Олейник О. А., **Самохин** В. Н.
1997. *Математические методы в теории пограничного слоя.* М.: Наука.

Онзагер (Onsager L.).
1949. *Statistical hydrodynamics* // Nuovo Cimento (Supplement). 6. P. 279–287.

Оран Э., **Борис** Дж.
1990. *Численное моделирование реагирующих потоков*. М.: Мир.

Пайерс Р.
1983. *Построение физических моделей* // УФН. Т. 140, вып. 2.

Пайс А.
1989. *Научная жизнь и деятельность Альберта Эйнштейна*. М.: Наука.

Педли Т.
1983. *Гидродинамика крупных кровеносных сосудов*. М.: Мир.

Пенегрин Д.
1984. *Очарование гидромеханики* // Современная гидродинамика: успехи и проблемы» / Под ред. Дж. Бэтчелор, Г. Моффат. М.: Мир. С. 91–119.

Поль Р. В.
1971. *Механика, акустика и учение о теплоте*. М.: Наука.

Пономарёв В. А.
1975. *Асимптотический анализ турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости* // Уч. зап. ЦАГИ. Т. 6. № 3. С. 42–50.

Прандтль (Prandtl L.).
1904. *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung* // Verh. d. 3 Intern. Math. Kongr. (Heidelberg, 1904; Leipzig: Teubner, 1905. S. 484–491).

1951. *Гидроаэромеханика*. М.: ИЛ.

Пригожин И., **Стенгерс** И.
1986. *Порядок из хаоса*. М.: Прогресс.

Пуанкаре А.
1983.*О науке*. М.: Наука. С. 95.

2000. *Теория вихрей.* М.-Ижевск: РХД.

Пуллин (Pullin D. I.).
1992. *Contour dynamics methods* // Ann. Rev. Fluid Mech. Vol. 24. P. 89–115.

Рассол И. Р.
1999. *Иван Григорьевич Бубнов.* М.: Наука.

Рейнольдс А. Дж.
1979. *Турбулентные расчеты в инженерных приложениях.* М.: Энергия.

Рид Х. Л. (Reed H. L.).
1991. *Gallery of fluid motion* // Phys. Fluids. Vol. 3. №9. P. 2027–2037.

Розенхед (Rosenhead L.).
1931. *Formation of vortices from a surface of discontinuity* // Proc. Roy. Soc. A134. P. 170–192.

Роуз, Инс (Rouse H., Ince S.).
1957. *History of hydraulics.* Iowa: State Univ.

Роуч П.
1980. *Вычислительная гидродинамика.* М.: Мир.

Рэлей Дж.
1955. *Теория звука.* М.: ГИТТЛ. Т. 1, 2.
2001. *Случайность и хаос.* М.-Ижевск: РХД.

Саусвелл (Southwell R. V.).
1946. *Relaxation methods in theoretical physics.* N. Y.: Oxford Univ. Press.

Седов Л. И.
1977. *Методы подобия и размерности в механике.* М.: Наука.

Серрин Дж.
2001. *Математические основы классической механики жидкости.* М.-Ижевск: РХД.

Сивухин Д. В.
1990. *Общий курс физики.* Том 2. *Термодинамика и молекулярная физика.* М.: Наука.

Сирда, Тирапегу (Cerda E. A., Tirapegui E. L.).
1998. *Faraday's instability in viscous fluid* // Jour. Fluid Mech. V. 368. P. 195–228.

Сохоцкий Ю. В.
1873. *Об определённых интегралах и функциях, употребляемых при разложении в ряды.* СПб.

Стокер Дж.
1959. *Волны на воде.* М.: ИЛ.

Страхович К. И.
1980. *Гидро- и газодинамика.* М.: Наука.

Струминский В. В.
1985. *Аэродинамика и молекулярная газовая динамика.* М.: Наука.

Стюартсон, Вилльямс (Stewartson K., Williams P. G.).
1969. *Self-induced separation* // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. Vol. 312. №1509. P. 181–206.

Сычев В. В.
1987(ред.). *Асимптотическая теория отрывных течений.* М.: Наука.

Сэффмен Ф. Дж.
2000. *Динамика вихрей.* М.: Мир.

Тейлор (Taylor G. I.).
1958–1971. *Scientific Papes.* Vol. 1–4 / Ed. G. K. Batchelor. Cambridge: Univ. Press.

Тейяр де Шарден П.
2001. *Феномен человека.* М.: Устойчивый мир.

Темам Р.
1981. *Уравнения Навье – Стокса.* М.: Мир.

Тинг, Клейн (Ting L., Klein R.).
1991. *Viscous vortical flows* // Lecture Notes in Physics. Springer. Vol. 374.

Тихомиров В. М.
1999(ред.). *Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове.* М.: Фазис.

Токати (Tokaty G. A.).
1971. *A history and philosophy of fluid mechanics.* Oxford: Henley-on-Thames.

Томпсон Дж. М. Т.
1985. *Неустойчивости и катастрофы в науке и технике.* М.: Мир.

Тригуб, Блохин, Симакин (Trigub V. N., Blokhin A. B., Simakin I. N.).
1994. *The asymptotic study of dissipation and breakdown of a wing-tip vortex* // J. Fluid Mech. Vol. 274. P. 293–337.

Трубецков Д. И.
2004. *Введение в синергетику. Хаос и структуры.* М.: УРСС.

Трубецков Д. И., **Мчедлова** Е. С., **Красичков** Л. В.
2002. *Введение в теорию самоорганизации открытых систем.* М.: Физматлит.

Трусделл К.
1975. *Первоначальный курс механики сплошных сред.* М.: Мир.

Трусделл К., **Манкастер** (Trusdell C., Muncaster R. G.).
1980. *Fundamentals of Maxwel's kinetic theory of a simple monatomic gas.* N. Y.: Academic Press.

Тэн И.
1996. *Философия искусства.* М.: Республика. С. 270.

Уизем Дж.
1977. *Линейные и нелинейные волны.* М.: Мир.

Уолкер Дж.
1989. *Физический фейерверк.* М.: Мир.

Фабер Т. Е.
2001. *Гидроаэродинамика.* М.: Постмаркет.

Фернандес де ля Моро и др. (Fernandes-de la Moro J. e.a.).
1999. *Conically similar swirling flows at high Reynolds number* // Q. Jour. Mech. Appl. Math. Vol. 52. № 1. P. 1–53.

Фершинг Г.
1984. *Основы аэроупругости.* М.: Машиностроение.

Флетчер К.
1988. *Численные методы на основе метода Галёркина.* М.: Мир.
1991. *Вычислительные методы в динамике жидкостей.* М.: Мир. Т. 1–2.

Флюгге (Flugge S., ed.).
1963. *Handbuch der physik.* Berlin: Springer Verlag. Bd. VIII/2.

Франкль Ф. И.
1973. *Избранные труды по газовой динамике.* М.: Наука.

Фридман А. А.
1976. *Избранные труды.* М.: Наука.

Фриш У.
1998. *Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова.* М.: Фазис.

Фром (From J. E.).
1961. *Lagrangian difference approximation for fluid dynamics* // Los Alamos Sci. Lab. № 2535.

Хайдеггер М.
1998. *Пролегомены к истории понятия времени.* Томск: Водолей.

Хасимото (Hasimoto H.).
1972. *A solution on a vortex filament* // J. Fluid Mech. Vol. 51. P. 477–485.

Харди Г. Г.
2000. *Апология математика.* Ижевск: РХД. С. 82–83.

Хейз У. Д., **Пробстин** Р. Ф.
1962. *Теория гиперзвуковых течений.* М.: ИЛ.

Хокинг С.
2000. *Краткая история времени.* СПб.: Амфора.

Хорнунг (Hornung H. e.a.).
1995. *The flow field downstream of a hydraulic jump* // Jour. Fluid Mech. V. 287.

Христианович С. А.
1998, 2000. *Избранные работы: речная гидравлика, теория фильтрации, аэродинамика и газовая динамика, горное дело, теория пластичности, энергетика.* М.: Наука. Т. 1–2.

Хюссейн (Hussaini M. Y., ed.).
1997. *Collected Papers of Sir Jams Lighthill.* Vol. 1–4. N. Y.: Oxford Press.

Чаплыгин С. А.
1976. *Избранные труды.* М.: Наука.

Ченг (Cheng H. K.).
1955. *Aerodynamics of a rectangular plate with vortex separation in supersonic flow* // JAS. Vol. 22. № 4. P. 217–226.

Шафаревич И. Р.
2000. *Русский народ на переломе тысячелетий.* М.: Русская идея.

Шелохаев В. В.
1997(ред.). *Русское зарубежье. Золотая книга эмиграции: Первая треть XX века.* М.: РОССПЭН.

Шенк Х.
1972. *Теория инженерного эксперимента.* М.: Мир.

Ширайши, Сато (Shiraishi M., Sato T.).
1994. *Switching phenomenon of a bathtub vortex* // Jour. Appl. Mech. Vol. 61. P. 850–854.

Ширяев А. Н.
1998. *К истории теории вероятности* // Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Фазис. С. 101.

Шифрин Э. Г.
2001. *Потенциальные и вихревые трансзвуковые течения идеального газа*. М.: Физматлит.

Эванс, **Харлоу** (Evans M. W., Harlow F. Y.).
1957. *The Particle-in-Cell method for hydrodynamic calculation* // Los Alamos Sci. Lab. Rept. № LA-2139.

Эйнштейн А.
2001. *Эволюция физики*. М.: Устойчивый мир. С. 191, 235.

Яглом М. И.
1980. *Математические структуры и математическое моделирование*. М.: Сов. радио.

Ясперс К.
1994. *Смысл и назначение истории*. М.: Республика.

Именной указатель

Августин 135
Авенариус Р. 139
Аверинцев С. С. 192
Адамар Ж. 68
Аккерет Ж. 21, 157
Александров П. С. 276
Алексеева Р. Н. 173
Америго В. 21
Андерсон Д. 64, 276
Андрианов И. В. 276
Андрианов И. М. 26
Андронов А. А. 31, 197, 234, 276
Антон Л. 192, 276
Аристотель 11, 163, 276
Арлазоров Н. 158
Арнольд В. И. 161, 162, 199, 276
Архимед 12, 214

Бадос Д. Ж. 241, 281
Бакингем Р. 159, 187, 276
Балле И. 247
Баренблатт Г. И. 9, 86, 163, 277
Барнет 182
Барроу И. 145
Бартини Р. Л. 197
Бах И. С. 146
Бахметьев Б. А. 156, 277
Бахтин М. М. 137
Беленький С. З. 176
Беляев В. Н. 164
Бенар Г. 234–236
Бендер О. 183
Берия Л. П. 197
Бернулли Д. 14, 19, 52, 56, 70, 151, 231
Берс Л. 16, 17, 277
Бестужев-Лада Н. В. 147, 148, 277
Бетц А. 21, 26, 43
Бибербах 172
Биркгоф Г. 30, 57, 70, 75, 192, 278
Блехман И. И. 7, 278
Блохин А. Б. 101, 291
Блюменфельд Л. А. 68, 135, 153, 278
Бобылев Д. К. 155
Боголюбов Н. Н. 26, 162, 177, 278
Бор Н. 11, 45, 46, 67, 163
Борис Дж. 64, 288
Борисов А. В. 58, 60, 158, 278
Борисов В. П. 278
Борман Е. 202
Борн М. 202
Боссю 33
Ботезат Г. А. 196

Браун С. 91, 278
Брежнев Л. И. 198
Бриллюэн М. 117
Брутян М. А. 83, 278
Брюсов В. 184
Бубнов И. Г. 26, 62, 289
Будда 137
Буземан А. 17, 21, 41, 185, 189, 278
Булах Б. М. 200, 279
Бунин И. 196
Бурали-Форти 68
Бурбаки Н. 49, 152, 199, 279
Буридан 11
Буссинеск 25
Бьеркнес 70
Бэкон Р. 12, 34
Бэкон Ф. 12, 31, 145
Бэтчелор Дж. 9, 24, 55, 60, 67, 131, 145, 194, 206, 213, 279, 288

Вавилов С. И. 202, 279
Вайнберг С. 9, 279
Ван-Дайк М. 17, 21, 26, 36, 37, 70, 79, 105, 107, 183, 188, 205, 237, 279
Ваттер М. 196
Вейерштрасс 172
Вейнхэм 145
Вендрофф 62
Вернадский В. И. 279
Вестуотер Ф. Л. 63, 279
Ветчинкин В. П. 160
Вигнер Е. П. 28, 153
Виет 259
Вильямс П. Ж. 165, 290
Вилля 117
Вильсон К. Дж. 132
Винер Н. 142, 279
Виноградов Г. 201
Витт А. А. 197
Витте С. Ю. 64
Владимиров Ю. С. 7, 25, 141, 280
Владимирский В. В. 176
Войнич Э. 145
Волошин М. 240
де Вриз 25
Вуд Р. 201

Гайфуллин А. М. 60, 89, 103, 122, 165, 193, 278, 280
Галёркин Б. Г. 62, 292
Галанин М. Д. 176
Галилей Г. 12, 33, 163, 201, 280
Гальтон Ф. 202, 234
Гамов Г. А. 162, 198
Гапонов-Грехов А. В. 199, 276
Гартман Ю. 234
Гартфилд 143
Гаусс Г. Ф. 48
Гегель 146
Гейзенберг В. 27, 38, 162
Гельмгольц Г. 14, 15, 20, 52, 69, 104, 130, 131, 158, 201, 232, 280
Гердер И. Г. 150, 280
Герц 30, 163
Гетерт А. 43
Гиббс Д. У. 48
Гильберт Д. 7–9, 48, 172, 182, 276

Гинзбург В. Л. 25, 27, 90, 141, 176, 280
Гитлер 170
Глейк Дж. 27, 64, 280
Глушко В. П. 197
Гнеденко Б. В. 24, 280
Гоббс Т. 48
Годунов С. К. 62, 280
Голованов Я. К. 164, 197, 280
Гольдштейн С. 15, 19, 100, 145, 280
Гольдштик М. А. 198, 211, 281
Гоман М. Г. 198
Гомер 142
Гонор А. Л. 198
Гордеев С. В. 60, 278
Горлин С. М. 172
Грей Дж. 74
Грин С. Т. 52, 102, 281
Гродзовский Г. Л. 164, 191, 281
Громека И. С. 154, 155, 281
Гроховский 197
Грэхэм Л. Р. 281
Гудерлей К. Г. 16, 174, 187
Гук Р. 77, 145, 163
Гумилёв Л. Н. 135, 138, 281
Гумилёв Н. 184
Гуревич М. И. 70, 281
Гуцол А. Ф. 211, 281

Дагер Ж. 34
Данилов Ю. А. 78, 281
Дарвин Ч. 246
Дариус Дж. 34, 281
Дарси 18, 77
Дебора 241
Декарт Р. 12, 33
Джевицкий С. 160
Джейкобс И. Д. 43
Джозеф Д. Д. 18, 281
Джонс Р. 109
Додд Р. 15, 281
Дойч Д. 68, 141, 148, 282
Дородницын А. А. 181, 188
Достоевский Ф. М. 163
Драйден Х. Л. 174
Дугин А. Г. 141, 282
Дюбуа П. 33, 73, 74
Дюгем П. 31, 46, 282
Дюрэнд В. Ф. 155, 282

Евклид 246

Жаботинский А. М. 162
Жигулёв В. Н. 102
Жирар 19
Жуковский Н. Е. 72, 74, 105, 154–158, 160, 164, 179, 196, 204, 282

Заде Л. А. 48
Заратуштра 137
Заславский Г. М. 198
Захаров В. Д. 282
Захаров В. Е. 15, 35, 47, 199
Зельдович Я. Б. 16, 86, 162, 187, 199, 282
Зенгер Е. 17
Зенон Э. 68
Зифф Р. М. 60, 284
Зоммерфельд А. 15, 24, 157

Зубцов А. В. 91, 165, 183, 280, 282

Ивин А. А. 68, 282
Идельчик И. Е. 72, 282
Иловайский И. Д. 166
Ильюшин А. А. 200
Искандер Ф. 143

Кавтарадзе Р. З. 285
Каден Х. 63, 282
Кадомцев Б. Б. 37, 222, 227, 283
Калинин К. А. 197
Кант И. 48
Кантор 68
Каплун С. 26, 183
Карамзин 144
Карман Т. 16, 27, 42, 70, 108, 162, 174, 188, 200
Карно 37, 38
Картвели А. М. 196
Касти Дж. Л. 201, 283
Келдыш М. В. 164, 171, 173
Келлер Л. В. 22, 161
Кельвин У. 52, 59, 60, 131, 145, 175, 225, 232
Кемерни Дж. 48
Кеплер 33, 38
Кибель И. А. 60, 171, 284
Кирхгоф Г. Р. 38, 52, 54, 58, 283
Кистер А. Л. 28, 283
Кишиба 102, 287
Клайн Дж. 75, 283
Клапейрон 18, 151
Клейменов 197
Клейн М. 48, 52
Клейн Р. 291
Климонтович Ю. Л. 199
Ключевский В. О. 144, 198
Коанд Г. 215, 216
Кобзарев И. Ю. 141, 283
Коган М. Н. 190
Козлов В. В. 58, 283
Койтер 96, 97, 99
Кокшайский Н. В. 9, 283
Колган В. П. 164
Колмогоров А. Н. 23, 32, 156, 161–163, 165, 236, 283, 291, 292, 294
Колумб 21
Коперник 38, 69
Королев С. П. 164, 197, 280
Коротков Н. С. 230, 231
Корсин С. 28, 125, 215, 283
Кортевег 25
Космодемьянский А. А. 157, 283
Костомаров 144
Косыгин А. Н. 64
Коул Дж. 16, 17, 26, 111, 174, 283
Кочин Н. Е. 60, 161, 163, 164, 284
Коши О. 57, 85, 107, 132, 155, 156, 175, 192, 193, 221, 247
Крайко А. Н. 190, 191, 284
Кранк Дж. 62, 284
Крапивский П. Л. 83, 278
Красильщиков П. П. 164
Красичков Л. В. 291
Крускал Н. 15
Крылов А. Н. 164
Ксенофан 7

Кузнецов В. Р. 102, 198
Кузнецов Е. А. 284
Кук Л. 16, 17, 283
Кун Т. 139–141, 284
Кундт А. 232, 233
Курант Р. 48, 62, 284
Курчевский Л. В. 197
Кутта В. М. 105, 107, 156, 157
Куэтт 33
Кэмпбел К. Дж. 60, 284
Кюхеман Д. 41, 44, 52, 284

Лаверье У. 247
Лавочкин С. А. 180
Лагерстрем П. 183
Лагранж 62, 172, 190, 231, 249, 250
Лагт Х. 59, 209, 284
Ладыженская О. А. 49, 76, 284
Ладыженский М. В. 185
Лайтхилл М. Дж. 15, 25, 26, 111, 145, 225, 272–275, 284
Лакатос И. 135, 139–141
Лакс 62
Ламб Г. 27, 145, 155
Ландау Л. Д. 25, 90, 161, 163, 170, 173, 198, 199, 276
Ланчестер Ф. 41, 104, 105, 145
Лаплас 26, 51, 91, 97, 106, 107, 109, 120, 233, 247
Латта Г. 26
Леви Х. 62
Левин Л. М. 169, 172, 176
Левич В. Г. 198, 218, 285
Лежандр 95, 99, 251
Лекторский В. А. 152, 285
Лем С. 30, 285
Ленард 172
Ленин 167
Леонардо да Винчи 11, 12, 23, 285
Леонтьев А. И. 156, 285
Лере 49, 95
Ли 133, 162
Линь Шао-цзи 17
Липман У. 177
Лиссажу Ж. 232
Лойцянский Л. Г. 160, 161, 163, 285
Лузин А. 218, 285
Лукьянов Г. И. 196
Лэмб Г. 285
Ляпунов А. М. 155

Магнус Г. Г. 157, 202
Майевский Н. В. 157
Майер Ю. Р. 15
Майкельсон 30
МакКормак Р. В. 62, 285
Макаревский А. И. 167, 178
Маклорен 248, 268, 273
Максвелл Дж. К. 20, 21, 37, 109, 150, 163, 188
Мамаев И. С. 58, 60, 278
Маневич Л. И. 26, 276
Манин Ю. И. 141, 283
Манкастер Р. Г. 195, 291
Марангони 239
Маревцева Н. А. 286
Марков А. А. 155
Маркс К. 246

Мартынов А. К. 185
Марчук Г. И. 199
Маслов В. П. 131, 132, 199, 286
Массо И. 62, 286
Маучли 63
Мах Э. 16, 34, 35, 39, 40, 106, 108, 111, 139, 151, 157, 163, 189, 225, 286
Махонин И. 196
Менг С. И. 16
Менделеев Д. И. 154
Месситор А. Ф. 111
Метрополис Н. 63, 286
Мехеш К. 67, 286
Мечников И. И. 154
Миеле А. 190, 286
Микеладзе В. Г. 164
Микоян А. И. 180
Миллионщиков М. Д. 162, 169
Минайлос А. Н. 164, 286
Митропольский Ю. А. 26, 278
Митчел Р. 135, 145
Мозер 161
Монин А. С. 9, 26, 128, 161, 162, 277, 286
Моравец К. С. 174, 189
Морен 157
Моффат Г. 145, 220, 279, 288
Муан П. 67, 286
Мультхоп 26
Мунк М. 21, 43, 108
Мур 101, 103, 193
Мусинянц Г. М. 160, 164
Мчедлова Е. С. 291
Мышкис А. Д. 278
Мясищев В. М. 178, 197

Навье Л. 2, 18–20, 22, 27, 33, 47, 49–51, 59, 66, 76, 79, 83, 85, 87, 94, 95, 100, 109, 116, 118, 132, 150, 155, 182, 191, 290
Найфэ А. 287
Незлин М. В. 206, 287
Нейланд В. Я. 163, 165, 287
Нейман Дж. 14, 62, 63, 287
Некрасов А. И. 197
Нестеров М. В. 144
Николаева Н. С. 145, 287
Никольсон П. 62, 284
Никурадзе И. И. 21, 156
Новиков Е. А. 198
Ньепс Н. 34
Ньютон И. 9, 11–13, 15, 17–19, 25, 33, 45, 47, 70, 77, 78, 145, 163, 185, 202, 203, 221, 222, 241, 244, 246, 279, 287
Ньюэлл А. 287

Обухов А. М. 162, 198
Овсянников Л. В. 133, 169, 195, 287
Окитани 102, 287
Оккам У. 11, 45, 145
Олейник О. А. 50, 287
Онзагер Л. 288
Оран Э. 64, 288
Орр В. 24
Осватич К. 188
Остославский И. В. 164

Остроградский М. В. 155

Павлов И. П. 154, 169, 201
Пайс А. 202, 288
Пановко Я. Г. 278
Пастер 134
Пастернак В. 146, 192, 207
Педли Т. 9, 288
Пенегрин Д. 212, 288
Перельман Я. 201
Перрен Ж. 202
Петерман А. 132
Петляков В. М. 197
Петр I 43, 163
Петров И. В. 198
Петров К. П. 164
Петухов И. В. 164
Пифагор 231
Планк М. 47, 152, 163, 172
Плато 212
Племели И. 156
Плетчер Р. 276
Победоносцев Ю. А. 164
Полибий 138, 143
Полубаринова-Кочина П. Я. 286
Поль Р. В. 201, 288
Польгаузен 173
Пономарёв В. А. 126, 128, 130
Понтрягин Л. С. 31, 188
Попов А. Ф. 154
Поппер К. 48, 139, 141
Прандтль Л. 20, 21, 26, 52, 70, 71, 106, 155, 163, 181, 288
Прасковский А. А. 198
Праудмен Дж. 194, 206
Пригожин И. 21, 161, 162, 288
Пробстин Р. Ф. 17, 293
Прокофьев-Северский А. Н. 196
Прудков К. 222
Пуазейль Дж. Л. М. 15
Пуанкаре А. 26, 30, 48, 52, 77, 163, 246, 271, 288
Пуассон С. Д. 86, 97, 114, 155, 221
Пуллин Д. И. 66, 289
Пушкин А. 68

Райзер Ю. П. 86, 187, 282
Райт 29, 30, 43
Ранк Г. И. 211, 281
Рассел Б. 48, 68
Рассел С. 15, 145, 226, 227
Рассол И. Р. 26, 289
Рейнольдс А. Дж. 214, 289
Рейнольдс О. 2, 20–23, 40, 50, 66, 87, 103, 117, 118, 123, 125–127, 145, 157, 179, 218, 278
Ренкин 54
Риман Б. 16, 62, 107
Рисберг А. Б. 164
Рихтмайер Р. Д. 62, 103, 287
Ричардсон Л. 22, 23, 61, 62
Ришар 68
Роббинс Г. 48
Розе Н. В. 60, 284
Розен 38, 68
Розенблатт Ф. 63
Розенхед Л. 63, 145, 289
Россби 205, 206, 287

Ротт Н. 57, 101, 192
Роуз Х. 29, 289
Роуч П. 61, 64, 289
Рубан А. И. 102, 198
Рубан В. П. 284
Рыдник В. И. 222, 283
Рыжов О. С. 16, 170, 198
Рэлей Дж. 145, 231, 233, 289
Рюэль Д. 49, 50
Рябушинский Д. П. 158, 159, 179, 278

Сабельников В. А. 198
Самохин В. Н. 50, 287
Сарантонелло Э. 70, 278
Сато Т. 293
Саусвелл Р. В. 62, 289
Сахаров А. Д. 188
Свифт Д. 23
Свищев Г. П. 178, 187
Седов Л. И. 86, 187, 199, 289
Серебрийский Я. М. 164, 183
Серрин Дж. 155, 289
Сеченов И. М. 154
Сивухин Д. В. 202, 212, 290
Сикорский И. И. 158
Симакин И. Н. 101, 291
Сирда Е. А. 290
Сирс 42, 101
Слезингер И. И. 172
Смит Ф. Т. 145
Снежкин Е. Н. 206, 287
Собинов Л. В. 166
Соколовский М. А. 60, 278
Солженицын А. И. 196, 197
Сорос 144
Сохоцкий Ю. В. 155, 156, 290
Сталин 167, 172, 196
Стеклов В. А. 155
Стенгерс И. 21, 288
Стернберг 96, 97, 99
Стечкин Б. С. 160, 164, 197
Стирлинг 252
Стокер Дж. 15, 290
Стокс Дж. 2, 16, 19, 20, 22, 27, 33, 47, 49–51, 59, 66, 70, 76, 79, 83, 85, 87, 94, 95, 100, 102, 103, 109, 116, 118, 132, 145, 150, 163, 182, 191, 223, 290
Столетов А. Г. 154
Столыпин П. А. 64
Страхович К. И. 197, 290
Струков М. 196
Струминский Б. В. 177
Струминский В. В. 164–166, 175, 176, 178–183, 290
Струминский В. Я. 175
Стюартсон К. 91, 145, 165, 278, 290
Сычев В. В. 79, 100, 101, 117, 130, 163, 165, 290
Сэффмен Ф. Дж. 52, 54, 55, 60, 61, 65, 103, 192, 219, 290

Таганов Г. И. 165, 189
Такенс Ф. 27
Танненхил Дж. 276
Таубин 197
Тацит 143

Тейлор Дж. И. 102, 112, 145, 194, 206, 207, 248, 290
Тейлор Э. 145, 205
Тейяр де Шарден П. 136, 290
Темам Р. 49, 290
Тимирязев К. А. 201
Тимошенко С. П. 154, 164
Тимошин С. Н. 198
Тинг Л. 52, 291
Тирапегу Е. 232, 290
Тихомиров В. М. 162, 291
Тойнби Дж. 67, 138, 141
Токати Г. А. 29, 291
Толмин В. 21
Томпсон Дж. М. Т. 64, 291
Томс 242
Томсон В. 16, 59
Томсон Дж. М. Т. 59
Треффтц 72
Тригуб В. Н. 101, 198, 291
Трикоми Ф. 16, 174
Трифонов Ю. 139
Троунг Т. 63
Трубецков Д. И. 78, 291
Трусделл К. 47, 195, 291
Туполев А. Н. 160, 197
Тьюринг А. 63
Тэйлор Дж. И. 22, 145
Тэн И. 139, 291
Тютчев Ф. И. 148, 222

Уайлс Э. 27
Уайльд О. 68
Уизем Дж. 15, 26, 103, 291
Уилсон М. 135
Уиткомб Р. Т. 43
Улам С. Н. 63, 286
Уолкер Дж. 201, 231, 233, 291
Уорд Дж. 109
Уортингтон А. 36
Ушаков Б. А. 186

Фабер Т. Е. 209, 292
Фабр Ж. А. 201
Фабрикант А. Л. 234, 276
Фалькович С. В. 16, 200
Фарадей М. 163, 232
Федяевский К. К. 164
Фейгенбаум М. 27, 132
Фейнман Р. 77
Ферма 27
Ферми Э. 63
Фернандес-де ля Моро Ж. 190, 292
Ферри А. 188
Ферсман А. Е. 201
Фершинг Г. 42, 292
Фик 18, 77
Филиппов В. М. 183
Фламмарион К. 201
Флетчер К. 62, 64, 292
Флорин Н. 196
Флюгге С. 195, 292
Фок 175
Фомин В. М. 10, 164, 183
Форсайт А. Р. 155
Франкль Ф. И. 16, 163, 164, 169–175, 181, 185, 292

Фридман А. А. 22, 155, 156, 160, 161, 164, 165, 198, 286, 292
Фридрихс К. О. 62, 107, 284
Фриш У. 50, 95, 102, 103, 193, 236, 292
Фром Дж. Е. 62, 292
Фруд У. 145
Фурманов Е. М. 197
Фурье 38, 77, 174, 231

Хайдеггер М. 135, 292
Хайек Ф. 177
Харди Г. Г. 134, 292
Харламов Н. М. 178, 197
Харлоу А. И. 62, 294
Хасимото Х. А. 61, 292
Хейз У. Д. 17, 293
Хеле-Шоу 220, 221
Хилл 54, 55
Хладни Э. 231–233
Хлебников В. И. 286
Ховарт 162
Хокинг С. 66, 135, 192, 293
Хорнунг Х. 217, 293
Христианович С. А. 164–166, 168–171, 173, 178–180, 185, 293
Хюссейн М. 145, 293

Цандер 34
Цянь Сюэ-сень 17, 108, 183, 200

Чаплыгин С. А. 16, 33, 156–160, 163, 164, 167, 174, 181, 185, 198, 199, 293
Чебышев П. Л. 155
Чекалов В. И. 197
Челомей В. Н. 164
Ченг Г. К. 16, 112, 293
Чепмен Г. К. 182
Черемухин А. М. 160
Чернышенко С. И. 198
Чесалов А. В. 164

Шабат 15
Шаудер 49
Шафаревич И. Р. 49, 293
Шелохаев В. В. 196, 293
Шенк Х. 32, 293
Ширайши М. 211, 293
Ширяев А. Н. 24, 294
Шифрин Э. Г. 17, 169, 174, 191, 200, 294
Шишкин С. Н. 178
Шлихтинг Х. 21
Шрёдингер Э. 61, 179, 209
Штарк 172
Штерн В. Н. 198
Штюкельберг Е. 132

Щербаков В. И. 7

Эванс М. В. 62, 294
Эверет Х. 25
Эджертон Г. 36
Эдисон Т. 63
Эйлер Л. 2, 13, 15, 16, 19, 26, 51, 52, 54, 59, 65, 69, 78, 79, 85, 87, 89, 90, 94, 101, 109, 112, 116, 154, 157, 171, 182, 231

Эйнштейн А. 30, 35, 38, 67, 68, 160, 163, 172, 202, 209, 246, 282, 288, 294
Эйфель А. 72
Эккерт 63
Энског 182

Юкава Х. 138
Юм Д. 46
Юнг Т. 15, 231
Юрьев Б. Н. 160, 164

Яглом А. М. 26, 128, 161, 162, 286
Яглом М. И. 48, 162, 294
Яковлев А. С. 168, 180
Яненко Н. Н. 199
Ясперс К. 136, 177, 294

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

subscribe@rcd.ru

Внимание: дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

http://shop.rcd.ru

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ФТИАН, Нахимовский проспект, д. 36/1, к. 307, тел.: 332–48–92 (почтовый адрес: Нахимовский проспект, д. 34)
2. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел. 135–54–37
3. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 1 этаж)
4. Магазины:

   Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)
   «Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)
   «Библиоглобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6)
   Книжный магазин «ФИЗМАТКНИГА» (г. Долгопрудный, Новый корпус МФТИ, 1 этаж, тел. 409–93–28)

   С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

Бетяев Станислав Куприянович

Пролегомены к метагидродинамике

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерная верстка С. В. Высоцкий
Корректор А. В. Соколова

Подписано в печать 21.04.2006. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,67. Уч. изд. л. 17,34.
Гарнитура Антиква. Бумага офсетная №1. Заказ №118.

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
http://rcd.ru E-mail: mail@rcd.ru

интернет-м
OZO
358650